



**THE EFFECTS OF CYLINDRICAL HOLE ON NATURAL FREQUENCY OF
COMPOSITE THICK PLATE**

Ülkü BABUŞCU YEŞİL*

Yıldız Teknik Üniversitesi, Kimya-Metalurji Fakültesi, Matematik Mühendisliği Bölümü, Esenler-İSTANBUL

Received/Geliş: 14.04.2009 Revised/Düzeltilme: 21.10.2009 Accepted/Kabul: 21.10.2009

ABSTRACT

In this study, the effects of cylindrical hole on natural frequency of composite thick plate are considered. Mathematical modelling of the problem is made by helping of the three dimensional motion equation of linear elasticity theory. The solution of the problem is made numerically using three dimensional finite elements method. The effect of cylindrical hole on dynamical behavior of considered thick plate is investigated with different geometric and material parameters.

Keywords: Composite thick plate, natural frequency, cylindrical hole, finite elements method.

**KOMPOZİT KALIN PLAĞIN DOĞAL TİTREŞİM FREKANSINA İÇERDİĞİ SİLİNDİRİK
BOŞLUĞUN ETKİSİ**

ÖZET

Bu çalışmada, silindirik boşluğun kompozit kalın plağın doğal frekanslarına etkisi ele alınmıştır. Problemin matematiksel modeli, Lineer Elastisite Teorisi'nin üç boyutlu hareket denklemleri yardımıyla yapılmıştır. Problemin çözümü, üç boyutlu sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak sayısal olarak yapılmıştır. Ele alınan kalın plağın dinamik davranışına silindirik boşluğun etkisi, farklı geometrik ve malzeme parametreleri için incelenmiştir.

Anahtar Sözcükler: Kompozit kalın plak, doğal frekans, silindirik boşluk, sonlu elemanlar yöntemi.

1. GİRİŞ

Yapı elemanlarının içerdiği süreksizliklerin (boşluk, dolgu, çatlak vb.), bu yapı elemanının statik veya dinamik davranışına etkileri elastisite teorisinin temel problemleri arasında yer almaktadır. Çünkü, tasarımla uğraşan mühendisler açısından, yapı elemanının içerdiği süreksizliklerin, yapının statik veya dinamik davranışına ne kadar etki gösterdiğinin bilinmesi, tasarımın üstleneceği görevi başarıyla yerine getirebilmesi açısından zorunludur.

Süreksizliklerin boyutları yapı elemanı boyutları mertebesinde olduğu (makro ölçekli) durumlara ait bazı çalışmalar [1-12] ve diğerleri olarak verilebilir. [3] kaynağında, dış basınç kuvveti etkisinde sonsuz boyutlu izotrop/anizotrop düzlemde veya plakta yer alan çeşitli formdaki boşluk/dolgu civarındaki gerilme yığılması problemi, lineer düzlem elastisite teorisi yardımıyla modellenmiştir. Elde edilen iki boyutlu problemlerin çözümü, konform dönüşüm yardımıyla

* e-mail/e-ileti: ubabuscu@yildiz.edu.tr, tel: (212) 383 46 16

boşluğun dışındaki bölgenin dairenin içine dönüştürülmesi ve bu bölgede sağlanan analitik gerilme fonksiyonlarının, problemin matematik modelinde yer alan denklemleri ve bağıntılarını sağlaması gerekliliğinden, bilinmeyen gerilme fonksiyonlarının belirlenmesi şeklinde analitik çözümler yapılmıştır. Çözüm bölgesi sonsuz olduğu durumlarda bazı problemlerin analitik çözümü bulunabilmekle beraber [1, 2], sonlu ortamlarda ele alınan problemlerin çözümünde sayısal çözüm yöntemlerinin kullanılması zorunludur [3-11]. [3-5] kaynaklarında farklı geometrilere sahip delik içeren izotrop/anizotrop plağın serbest titreşimine yapısındaki deliğin etkisi sayısal olarak incelenmiştir. Belirtelim ki, [3,4] kaynağında sayısal incelemeler Rayleigh-Ritz yöntemi ile, [5] kaynağında sonlu elemanlar yöntemi ile incelemeler yapılmıştır. [6-11] kaynaklarının hepsinde boşluk içeren plak ve/veya şerit-plak formundaki yapı elemanlarında çeşitli mesnet koşulları için dış kuvvet etkisinde boşluk civarında oluşan gerilme yığılmasına ait iki boyutlu statik problemler incelenmiştir.

Bu çalışmada, [3-5]'da incelenen şerit-plağın serbest titreşim problemleri veya [6, 7, 9 ve 11]'de verilen delik içeren anizotrop şerit-plağın, dış kuvvetler etkisinde delik civarında oluşan gerilme yığılması problemleri geliştirilerek, silindirik boşluk içeren kalın plağın, üst yüzeyine etki eden harmonik yük etkisinde, içerdiği silindirik boşluğun kalın plağın serbest titreşim modlarına etkisi sayısal olarak incelenmiştir. Üç boyutlu elastisite teorisi çerçevesinde problemin matematiksel modeli kurulmuş ve örnek problem dahilinde yapı elemanının içerdiği silindirik boşluğun, yapının dinamik davranışına etkisi çeşitli geometrik ve malzeme parametreleri için belirlenmiştir. Sayısal incelemeler için sonlu elemanlar yöntemi kullanılmış ve çözüm için gerekli tüm algoritma ve programlar tarafımızdan yapılmıştır.

2. PROBLEMLERİN MATEMATİKSEL FORMÜLASYONU

Ele alınan çalışmada Ω çözüm bölgesi (Şekil 1); x_1 yönünde l_1 , x_3 yönünde l_3 ve x_2 yönünde h uzunluğuna sahip, yapısında köşeleri yuvarlatılmış dikdörtgen en kesitli silindirik boşluk bulunan, dikdörtgen kalın plağı temsil etmektedir. Çözüm bölgesinde sağlanan hareket denklemleri:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_3} &= \rho \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}, \\ \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_3} &= \rho \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2}, \\ \frac{\partial \sigma_{31}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{32}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3} &= \rho \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2} \end{aligned} \quad (1)$$

bünye denklemleri;

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon} \quad (2)$$

dir. (2)'de,

$$\boldsymbol{\sigma}^T = (\sigma_{11} \ \sigma_{22} \ \sigma_{33} \ \sigma_{13} \ \sigma_{23} \ \sigma_{12}), \quad \boldsymbol{\varepsilon}^T = (\varepsilon_{11} \ \varepsilon_{22} \ \varepsilon_{33} \ \varepsilon_{13} \ \varepsilon_{23} \ \varepsilon_{12}) \quad (3)$$

dir ve \mathbf{D} matrisi, ele alınan yapı elemanının malzemesinin mekanik özelliklerini içeren matris olup, transversal izotrop malzeme için

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & 0 & 0 & 0 \\ A_{12} & A_{22} & A_{23} & 0 & 0 & 0 \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2A_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2A_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2A_{66} \end{pmatrix} \quad (4)$$

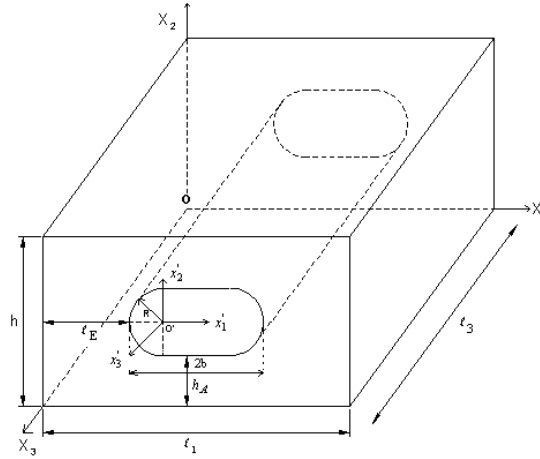
olur [1, 14]. Şekil değiştirme ve yer değiştirme bağıntıları;

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (5)$$

dir. Bilindiği üzere, serbest veya zorlanmış titreşim problemleri, titreşim hareketinin başlamasından çok sonra yani, yapının titreşimi kararlı hale geldiği durumda (stasyoner durum) incelendiğinden, problem matematik modelinde başlangıç koşullarının verilmesine gerek yoktur [3-5, 12, 13], sadece sınır koşullarının verilmesi yeterlidir. Buna göre ele alınan (1)-(5) probleminin çözümünde kullanılan sınır koşulları

$$\begin{aligned}
 u_2|_{x_1=0;\ell_1} = u_2|_{x_3=0;\ell_3} = 0, \quad \sigma_{1i}|_{x_1=0;\ell_1} = 0, \\
 \sigma_{21}|_{x_2=0;h} = \sigma_{23}|_{x_2=0;h} = 0, \quad \sigma_{22}|_{x_2=h} = pe^{i\omega t}, \quad \sigma_{22}|_{x_2=0} = 0, \\
 \sigma_{31}|_{x_3=0;\ell_3} = \sigma_{33}|_{x_3=0;\ell_3} = 0, \quad i=1,2,3 \\
 \sigma_{ij}n_j|_{S_I} = 0, \quad i,j=1,2,3
 \end{aligned} \quad (6)$$

olarak verilmektedir. (1)-(6)'da σ_{ij} , gerilme tansörü bileşenleri; ε_{ij} , şekil değiştirme tansörü bileşenleri; u_i 'ler, ($i, j = 1,2,3$) yer değiştirme vektörü bileşenleri, A_{ij} 'ler plak malzemesinin mekanik özelliklerini belirten sabitler ve S_I yapıdaki silindirik boşluğu sınırlayan yüzeyi göstermektedir.



Şekil 1. Çözüm bölgesi

Belirtelim ki, (1)-(6) problemi, ele alınan kalın plağın zorlanmış titreşimini temsil eder. Eğer (6)'da $x_2 = h$ 'da verilen sınır koşulunda dış kuvvet sıfır alınır, bu durumda problem ele alınan plağın doğal titreşimini temsil eden özdeğer problemine dönüşmüş olur.

Çözüm için, (1)-(6)'daki denklem ve ifadelerde yer alan aranan büyüklükler

$$\{\bar{\sigma}_{ij}, \bar{\varepsilon}_{ij}, \bar{u}_i\} = \{\bar{\sigma}_{ij}, \bar{\varepsilon}_{ij}, \bar{u}_i\} \exp(i\omega t) \quad (7)$$

olarak temsil edilir. (7)'de $\bar{\sigma}_{ij}, \bar{\varepsilon}_{ij}$ ve \bar{u}_i 'ler uygun büyüklüklerin genliğini göstermektedir. (7) ifadeleri (1)-(6)'da yerine yazılır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa, (1)'den genlikler için aşağıdaki denklemler elde edilir.

$$\frac{\partial \bar{\sigma}_{ij}}{\partial x_j} + \rho \omega^2 \bar{u}_i = 0 \quad (8)$$

(2)-(5)'deki denklem ve ifadeler aranan büyüklüklerin genlikleri için de aynen sağlanmaktadır. Ayrıca, (6)'da verilen sınır koşullarından $\sigma_{22}|_{x_2=h}$ 'daki değeri hariç, genlikler için aynen sağlanır. Bu koşul ise,

$$\bar{\sigma}_{22}|_{x_2=h} = p \quad (9)$$

olarak elde edilir. Böylece ele alınan plağın zorlanmış titreşimlerinin araştırılması, (8), (2)-(6) denklemleri ve (9) sınır koşulu çerçevesinde incelenmesine dönüştürülmüş olur.

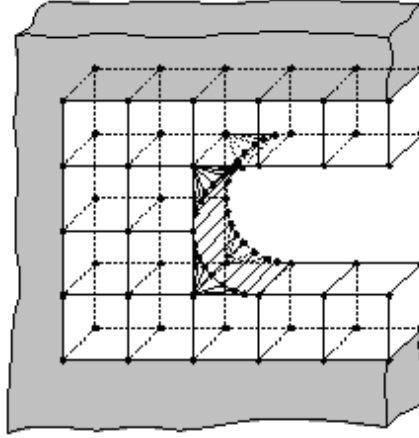
Belirtelim ki, bu çalışmanın amacı, köşeleri yuvarlatılmış dikdörtgen kesit alanlı silindirik boşluk içeren kompozit kalın plağın doğal frekans değerlerine, içerdiği silindirik boşluğun etkisinin incelenmesidir. Ancak bu incelemeler, ele alınan kalın plağın üst yüzeyinde normal doğrultuda zamana göre periyodik değişen dış kuvvet etkisindeki zorlanmış titreşim problemi ((8), (2)-(6) ve (9)) yardımıyla yapılacaktır [13].

3. ELE ALINAN PROBLEMİN VARYASYONEL FORMÜLASYONU

Yukarıda matematiksel modeli verilen problemin sonlu elemanlar formülasyonu,

$$\Pi = \frac{1}{2} \iiint_{\Omega} \bar{\sigma}_{ij} \bar{\varepsilon}_{ij} d\Omega - \iint_{S_D} \bar{\sigma}_{ij} n_j \bar{u}_i dS_D - \frac{1}{2} \iiint_{\Omega} \rho \omega^2 \bar{u}_i^2 d\Omega \quad (10)$$

fonksiyoneli yardımıyla yapılmıştır [12, 13]. (10)'da S_D, Ω bölgesini sınırlayan dış yüzeyde kuvvetin etki ettiği yüzeyi belirtmektedir. Belirtelim ki, (8) denklemleri (10) fonksiyonelinin Euler denklemleri olur. (10) fonksiyoneli ve bilinen Ritz tekniği yardımıyla ele alınan problemin sonlu elemanlar formülasyonu elde edilebilir.

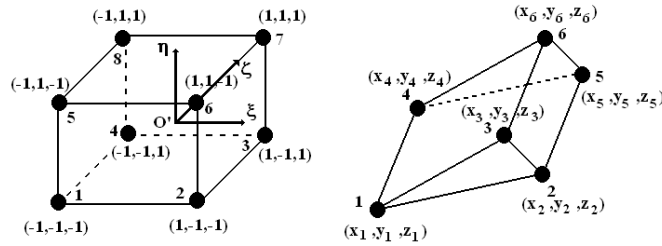


Şekil 2. Çözüm bölgesinin silindirik boşluk civarındaki sonlu eleman ağı

Çözüm bölgesi, sonlu adet alt bölgeye yani, sonlu elemana ($\Omega_{(k)}$, $k=1,2,\dots,M$) ayrıştırılır (Şekil 2). Burada,

$$\Omega = \bigcup_{k=1}^M \Omega_k \quad (11)$$

olur. $\Omega_{(k)}$ sonlu elemanları, silindirik boşluk civarında eğrisel kenara sahip beş yüzlü prizmatik elemanlar, geri kalan bölgede dikdörtgen prizmatik elemanlar olarak seçilmiştir. Dikdörtgen prizmatik elemanlar için 8 adet düğüm noktası (nod), beş yüzlü prizmatik sonlu eleman için 6 adet düğüm noktası (nod) kullanılmıştır (Şekil 3).



Şekil 3. Sonlu elemanlar ve nodların konumu

Dikdörtgen prizmatik sonlu elemanların nodlarında tanımlı şekil fonksiyonlarının ifadeleri normalize edilmiş koordinatlar yardımıyla; beş yüzlü prizmatik sonlu elemanların nodlarında tanımlı şekil fonksiyonlarının ifadeleri ise, hacim koordinatları ("alan koordinatları") yardımıyla belirlenmiştir [12]. Her sonlu eleman üzerindeki hesaplamalar ayrı ayrı yapılmış ve komşu sonlu elemanlar arasındaki ilgilerin belirlenmesinde bulunan sayısal değerler kullanılmıştır. Silindirik boşluk civarında alınan dikdörtgen sonlu elemanlar ile üçgen prizmatik sonlu elemanların temas eden yüzeylerinin büyüklüğü aynı alınarak, ortak nodların çakışması dolayısıyla, sonlu eleman sınırlarındaki nodlarda ilgilerin kolayca belirlenmesi sağlanmıştır.

Çözüm yöntemi gereği, her bir sonlu elemanda aranan yer değiştirme fonksiyonu polinom şeklinde kabul edilir. Aranan fonksiyonun şekil fonksiyonları ile ifadesi;

$$\mathbf{u}^{(k)} \approx \mathbf{N}^{(k)} \mathbf{a}^{(k)}, \quad k=1,2,\dots,M \quad (12)$$

burada,

$$\begin{aligned} \left(\mathbf{a}^{(k)} \right)^T &= \left\{ u_{11}^{(k)}, u_{21}^{(k)}, u_{31}^{(k)}, u_{12}^{(k)}, u_{22}^{(k)}, u_{32}^{(k)}, \dots, u_{1p}^{(k)}, u_{2p}^{(k)}, u_{3p}^{(k)} \right\} \\ \left(\mathbf{N}^{(k)} \right)^T &= \begin{Bmatrix} N_1^{(k)} & 0 & 0 & N_2^{(k)} & 0 & 0 & \dots & N_p^{(k)} & 0 & 0 \\ 0 & N_1^{(k)} & 0 & 0 & N_2^{(k)} & 0 & \dots & 0 & N_p^{(k)} & 0 \\ 0 & 0 & N_1^{(k)} & 0 & 0 & N_2^{(k)} & \dots & 0 & 0 & N_p^{(k)} \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (13)$$

$$\left(\mathbf{u}^{(k)} \right)^T = \left\{ u_1^{(k)}(x_1, x_2, x_3), u_2^{(k)}(x_1, x_2, x_3), u_3^{(k)}(x_1, x_2, x_3) \right\}$$

şekindedir. (12)'de k indisi uygun büyüklüklerin Ω_k sonlu elemanına ait olduğunu, $\mathbf{a}^{(k)}$ vektörünün bileşenleri ise Ω_k elemanın nodlarındaki aranan yer değiştirmeleri ayrıca, p alt indisi üçgen prizmatik (dikdörtgen prizmatik) sonlu elemanlar için 6 (8) değerini almaktadır. (10) fonksiyonlarında, (12) yerine yazılır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa,

$$\left(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M} \right) \mathbf{a} = \mathbf{r} \quad (14)$$

cebrik denklem sistemi elde edilir. (14)'deki \mathbf{K} ve \mathbf{M} matrislerinin elemanları,

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_{ijk} &= \iiint_{\Omega_k} \left(\mathbf{B}_j^{(k)} \right)^T \mathbf{D}^{(k)} \mathbf{B}_i^{(k)} d\Omega_k, \quad \mathbf{M}_{ijk} = \iiint_{\Omega_k} \mathbf{N}^T \mathbf{N} d\Omega_k \\ \mathbf{B}_j^{(k)} &= \begin{pmatrix} \frac{\partial N_j}{\partial x_1} & 0 & 0 & \frac{\partial N_j}{\partial x_2} & 0 & \frac{\partial N_j}{\partial x_3} \\ 0 & \frac{\partial N_j}{\partial x_2} & 0 & \frac{\partial N_j}{\partial x_1} & \frac{\partial N_j}{\partial x_3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial N_j}{\partial x_3} & 0 & \frac{\partial N_j}{\partial x_2} & \frac{\partial N_j}{\partial x_1} \end{pmatrix}, \quad \begin{matrix} i, j = 1, 2, \dots, p \\ k = 1, 2, \dots, M \end{matrix} \end{aligned} \quad (15)$$

ile belirlenir. (14)'de \mathbf{K} Rijidlik matrisi, \mathbf{M} kütle matrisi adını alır [12, 13].

Belirtelim ki, (14) denkleminde bulunan ω dış kuvvetin frekans değeri plağın doğal titreşim frekansına ($\omega_{cr.}$) yaklaştıkça, (14)'ün çözümünden elde edilen yer değiştirmeler sonsuza yaklaşacaktır. Bu özellikten yararlanarak, ele alınan problemin birinci doğal titreşim frekans değerleri ($\omega_{cr.I}$) elde edilecektir. Buna göre ele alınan yapı elemanına ait $\omega_{cr.I}$ değerlerine, kalın plağın çeşitli geometrik ve malzeme parametrelerinin etkisi (14) cebric denklemler sisteminin çözümünden belirlenecektir.

4. SAYISAL SONUÇLAR

Plak malzemesinin birbirini tekrarlayan iki izotrop, homojen levhadan oluşmuş çok katlı kompozit malzeme olduğu kabul edilmektedir. Bu malzemelerin sırayla Lamé sabitleri $\lambda^{(1)}, \lambda^{(2)}, \mu^{(1)}, \mu^{(2)}$; Young Modülleri $E^{(1)}, E^{(2)}$ ve Poisson oranları $\nu^{(1)}, \nu^{(2)}$ ile gösterilmiştir. Problemin $x_1 = \ell/2$ 'ye göre simetri özelliğinden yararlanılarak, çözüm bölgesi x_1 yönünde 20,

x_2 yönünde 12, x_3 yönünde 20 dikdörtgen prizmatik sonlu eleman ve silindirik boşluk etrafında bir katmanda 16 beş yüzlü prizmatik sonlu eleman olacak şekilde toplam, 4760 dikdörtgen prizmatik, 320 beş yüzlü prizmatik sonlu elemana ayrıştırılmıştır. Ele alınan durumda sonlu eleman modellemesi 5880 düğüm noktası (nod) ve 16.568 serbestlik derecesi (NDOF) içermektedir. Belirtelim ki, çözüm bölgesinin sonlu eleman ayrıştırılması, pek çok sonlu eleman ağı için bulunan değerlerin literatürdeki uygun değerlere en iyi yaklaşımı sağlayan sonlu eleman ağı arasından seçilmiştir. Ayrıca, Çizelgelerde boyutsuz büyüklükler verilmiştir. Buna göre boyutsuz doğal frekans $\bar{\omega}^2 = \frac{\omega^2 \rho \ell_1}{A_{22}}$ dir. Diğer problem parametrelerinin değerleri Çizelgeler

üzerinde verilmiş olup, parantez içindeki üst indisler, alt indis ve parantezsiz olarak kullanılmıştır. Ele alınan problem için yapı elemanının malzemesi, simetri eksenini Ox_2 olan transversal izotrop malzeme olarak modellenmiştir. Bu durumda, kompozit malzemenin normalize edilmiş mekanik sabitleri, aşağıdaki bilinen formüller yardımı ile elde edilir [13, 14].

$$A_{23} = A_{12} = \lambda^{(1)}\eta^{(1)} + \lambda^{(2)}\eta^{(2)} - \eta^{(1)}\eta^{(2)} \left(\lambda^{(1)} - \lambda^{(2)} \frac{(\lambda^{(1)} + 2\mu^{(1)}) - (\lambda^{(2)} + 2\mu^{(2)})}{(\lambda^{(1)} + 2\mu^{(1)})\eta^{(2)} + (\lambda^{(2)} + 2\mu^{(2)})\eta^{(1)}} \right)$$

$$\frac{1}{2}(A_{11} + A_{12}) = (\lambda^{(1)} + 2\mu^{(1)})\eta^{(1)} + (\lambda^{(2)} + 2\mu^{(2)})\eta^{(2)} - \frac{(\lambda^{(1)} - \lambda^{(2)})^2}{(\lambda^{(1)} + 2\mu^{(1)})\eta^{(2)} + (\lambda^{(2)} + 2\mu^{(2)})\eta^{(1)}}$$

$$\frac{1}{2}(A_{11} - A_{13}) = \eta^{(1)}\mu^{(1)} + \eta^{(2)}\mu^{(2)}, \tag{16}$$

$$A_{66} = A_{44} = \frac{\mu^{(1)}\mu^{(2)}}{\mu^{(1)}\eta^{(2)} + \mu^{(2)}\eta^{(1)}}, A_{55} = \eta^{(1)}\mu^{(1)} + \eta^{(2)}\mu^{(2)}$$

$$(A_{22}) = (\lambda^{(1)} + 2\mu^{(1)})\eta^{(1)} + (\lambda^{(2)} + 2\mu^{(2)})\eta^{(2)} - \eta^{(1)}\eta^{(2)} \frac{((\lambda^{(1)} + 2\mu^{(1)}) - (\lambda^{(2)} + 2\mu^{(2)}))^2}{(\lambda^{(1)} + 2\mu^{(1)})\eta^{(2)} + (\lambda^{(2)} + 2\mu^{(2)})\eta^{(1)}}$$

$A_{11} = A_{33}$

Çizelge 1 de, bazı E_2/E_1 ve ℓ_3/ℓ_1 değerleri için birinci doğal frekan ($\bar{\omega}_{cr,1}^2$) değerleri verilmiştir. Çizelgedeki verilerden her bir E_2/E_1 değeri için, ℓ_3/ℓ_1 oranı arttıkça elde edilen kritik doğal frekans değerinin, düzlem şekil değiştirme durumunda elde edilen Akbarov vd. (2000) kaynağındaki uygun değerlere yakınsadığı görülmektedir. Bu sonuçlara dayanarak, tarafımızdan yapılan algoritma ve programlardan bulunan sonuçlara güven sağlanmaktadır.

Çizelge 1. Boşluk içermeyen kalın plak için $\bar{\omega}_{cr,1}^2$ parametresinin farklı E_2/E_1 ve ℓ_3/ℓ_1 için değerleri ($h/\ell_1 = 0.1$)

E_2/E_1	ℓ_3/ℓ_1				Akbarov vd. (2000) (Düzlem şekil değiştirme durumu)
	1	2	3	4	
1	0.23	0.09	0.08	0.07	0.06
10	0.56	0.24	0.21	0.19	-
20	0.93	0.41	0.35	0.33	0.31
50	1.92	0.8	0.7	0.67	0.62

Çizelge 2. $\bar{\omega}_{cr,I}^2$ değerlerine yapıdaki boşluğun hacmi (V_B)'nin etkisi
($h/\ell_1 = 0.1, \ell_3/\ell_1 = 1, E_2/E_1 = 1, h_A = h_U = 5R, R = H/12$)

b/R	$V_B/V (*10^{-2})$	$\bar{\omega}_{cr,I}^2$
26.777	8.0947	0.193
20.333	6.1255	0.220
13.888	4.1564	0.238
10.666	3.1718	0.242
8.200	2.4181	0.243
6.400	1.8681	0.243
4.600	1.3181	0.242
2.800	0.7681	0.241
1.720	0.4381	0.240
1.360	0.3281	0.240
1.000	0.2181	0.239
0.0	0.0	0.238

Çizelge 2'de izotrop durumda farklı V_B/V (boşluğun hacmi/ toplam hacim) değerleri (veya boşluğun yarı yatay uzunluğunun yarıçapa oranı-b/R) için bulunan $\bar{\omega}_{cr,I}^2$ değerleri verilmiştir. Çizelgede verilen son satır, yapıda boşluk olmadığı durumda, yapının doğal frekansını göstermektedir. Buna göre, Çizelgedeki verilerden boşluğun hacminin artmasının $\bar{\omega}_{cr,I}^2$ kritik doğal frekans değerlerini önemli ölçüde etkilediği görülmektedir.

Çizelge 3. $\bar{\omega}_{cr,I}^2$ değerlerine $V_B/V (*10^{-2})$ ve E_2/E_1 parametre değişimlerinin etkisi
($h/\ell_1 = 0.1, \ell_3/\ell_1 = 1, h_A = h_U = 5R, R = H/12$)

$V_B/V (*10^{-2})$	E_2/E_1			
	1	10	20	50
0.0	0.238	0.566	0.939	1.920
5.8060	0.220	0.496	0.792	1.541
7.6687	0.193	0.432	0.689	1.340

Çizelge 4. $\bar{\omega}_{cr,I}^2$ değerlerine, $V_B/V (*10^{-2})$, E_2/E_1 ve h/ℓ_1 parametre değişimlerinin etkisi
($\ell_3/\ell_1 = 1, h_A = h_U = 5R,$)

E_2/E_1	$V_B/V (*10^{-2})$	h/ℓ_1		
		0.1	0.15	0.20
1	0.0	0.238	0.474	0.747
	5.8060	0.220	0.430	0.667
	7.6687	0.193	0.375	0.585
20	0.0	0.939	1.814	2.759
	5.8060	0.792	1.502	2.250
	7.6687	0.689	1.304	1.954

Çizelge 3 ve Çizelge 4 'de farklı yapıda silindirik boşluk olmaması ($V_B/V=0$) ve boşluk olması ($V_B/V \neq 0$) durumlarında sırasıyla E_2/E_1 ile h/ℓ_1 değişimlerinin $\bar{\omega}_{cr,1}^2$ kiritik doğal frekansına etkisi verilmektedir. Bu çizelgelerden, E_2/E_1 ve h/ℓ_1 değerlerinin artmasının $\bar{\omega}_{cr,1}^2$ değerini önemli ölçüde artırdığı, boşluk hacminin artmasının ise ilgili değeri önemli ölçüde düşürdüğü görülmektedir.

Çizelge 5' de silindirik boşluğun konumunun üst serbest yüzeye doğru bütünüyle kaydırılmasının (h_u değerinin küçülmesinin), kalın plağın izotrop ($E_2/E_1 = 1$) veya anizotrop ($E_2/E_1 = 10$) olması durumunda, $\bar{\omega}_{cr,1}^2$ parametresine etkileri verilmiştir. Çizelgedeki verilerden silindirik boşluğun üst yüzeye doğru yaklaştırılmasının, $\bar{\omega}_{cr,1}^2$ değerini düşürdüğü tespit edilmiştir.

Çizelge 5. $\bar{\omega}_{cr,1}^2$ değerlerine E_2/E_1 ve h_u/R parametre değişimlerinin etkisi

$$(h/\ell_1 = 0.1, \ell_3/\ell_1 = 1, h_A = h_U = 5R, V_B/V = 9.5317 * 10^{-2}, R = H/12)$$

E_2/E_1	h_u/R			
	5	4	3	2
1	0.161	0.161	0.158	0.145
10	0.363	0.362	0.353	0.308

5. SONUÇ VE DEĞERLENDİRME

Bu çalışmada, literatürde mevcut boşluk içeren şerit-plak veya plakların serbest titreşim problemleri, kenarları yuvarlatılmış dikdörtgen kesit alanlı silindirik boşluk içeren kalın plağın serbest titreşimi problemleri için geliştirilmiştir. Dolayısıyla bu çalışmada ele alınan problem, yapısında silindirik boşluk bulunan kompozit dikdörtgen kalın plağın doğal frekanslarına, yapısındaki boşluğun etkisinin, farklı malzeme ve geometrik parametreler için incelenmesi olarak verilebilir. Problemin matematiksel modeli üç boyutlu Lineer Elastisite Teorisi çerçevesinde yapılmıştır. Yapıdaki silindirik boşluk nedeniyle analitik çözülemeyen problem, üç boyutlu sonlu elemanlar modellemesi yardımıyla sayısal olarak çözülmüştür. Çözüm bölgesinin ayrıklaştırılmasında boşluk civarında beş yüzlü prizmatik sonlu elemanlar, geri kalan kısımda dikdörtgen prizmatik sonlu elemanlar kullanılmıştır. Sayısal çözümlemenin gerektirdiği algoritma ve programlar tarafımızdan yapılmıştır. Elde edilen sayısal sonuçlar literatürdeki uygun verilerle karşılaştırılarak, programlara güven sağlanmıştır. İncelemeler sonucunda, çeşitli malzeme ve geometrik parametre değişimleri için yapıdaki silindirik boşluğun ele alınan kompozit kalın plağın birinci doğal frekansına önemli ölçüde etki ettiği tespit edilmiştir.

Bu çalışmayı içeren Doktora Tezi Tübitak tarafından desteklenmektedir.

REFERENCES / KAYNAKLAR

- [1] Savin, G.N., "Stress Concentration Around Holes" E. Gros Translator, Pergomon-1961.
- [2] Timoshenko S.P., ve Goodier J.N., Theory of Elasticity, Third Edition, McGraw-Hill International Editions, London, 1970.
- [3] Huang M, Sakiyama T, Free vibration analysis of rectangular plates with variously-shaped holes, Journal Of Sound And Vibration V. 226 N. 4 Pp: 769-786, 1999.
- [4] Sakiyama T, Huang M, Matsuda H, Morita C, Free vibration of orthotropic square plates with a square hole, Journal Of Sound And Vibration V. 259, N. 1, Pp. 63-80, 2003.

- [5] Hota SS, Padhi P., Vibration of plates with arbitrary shapes of cutouts, Journal Of Sound And Vibration, V. 302, N. 4-5, Pp: 1030-1036, 2007.
- [6] Akbarov, S.D., Yahnioglu, N. and Yesil, U. "Interaction between two neighbouring circular holes in a pre-stretched simply supported orthotropic strip in bending", Mechanics of Composite Materials, Vol. 44, No. 6, Pp. 827-838, 2009.
- [7] Babuşcu Yeşil Ü., "Tek veya çift dairesel delik içeren şerit-levhada gerilme yığılmalarının Sonlu Elemanlar Yöntemiyle İncelenmesi", Yüksek Lisans Tezi, Fen Bilimleri Enstitüsü, YTÜ, 2005.
- [8] Chaudhuri, R. A., "Weakening effects of internal part-through elliptic holes in homogeneous and laminated composite plates", Composites Structures, 81, 362-373, 2007.
- [9] Mermer, A., "Dikdörtgen Delik İçeren Kompozit Şerit-Levhaların Eğilmesindeki Gerilme Yığılması Problemleri", Doktora Tezi, Fen Bilimleri Enstitüsü, YTÜ 2003.
- [10] Temiz, S., Özel, A., Aydın, M.D., "Fe Stress Analysis Of Thick Composite Laminates With A Hole İn Bending", Applied Composite Materials, 10: 103-117, 2003.
- [11] Yahnioğlu, N., Yücel M.A., "Dikdörtgen delik formunda dolgu malzemesi içeren şerit-levhada gerilme birikimi", YTÜ Dergisi, 4, 47-55, 2002.
- [12] Zienkiewicz, O.C. ve Taylor, R.L., "The Finite Element Methods: Basic Formulation and Linear Problems, Vol. 1, 4th Ed.", Mc Graw-Hill Book Company, Oxford-1989.
- [13] Akbarov S.D. and Guz A.N., "Mechanics of Curved Composites", Dordrecht, The Netherlands, Kluwer 2000.
- [14] Cristensen, R.M., "Mechanics of Composite Materials", John Willey and Sons, Int. New York, 1979.