ARAŞTIRMA MAKALESİ

# GEÇİLEBİLİRLİK SAYISI VE KİRİŞ ÇİZGELERİN KOMŞU BÜTÜNLÜĞÜ

**Pınar DÜNDAR* , Samim DÜNDAR****

**Ege Üniversitesi , Fen Fakültesi, Matematik Bölümü, Bornova-İZMİR*
***Dokuz Eylül Üniversitesi İktisadi ve İdari Bilimler Fakültesi, Ekonometri Bölümü, Buca-İZMİR*

**Geliş Tarihi: 18.02.2003**

**ACCESSIBILITY NUMBER AND NEIGHBOR-INTEGRITY OF CHORDAL GRAPHS**

**ABSTRACT**

After the failure of certain stations or communication links of a communication network, the network can not realize its function. By whatever cause cable cuts, node interruptions, software errors or hardware failures and transmission failure at various points can be caused interrupt service for long periods of time. In design of communication network must take into consideration these failures. In a communication network, the vulnerability measures the resistance of the network to disruption of operation after the failure of certain stations or communication edges. We get two graphs with n vertices and the same connectivity. The number of vertices of their largest components after any disruption can be different. Hence, connectivity is not enough for the measure of stability. If we consider of graph G as a modelling network, many graph theoretical parameters have been used to describe the vulnerability of communication .The neighbor-integrity of a graph is a measure of graph vulnerability, specially in spy networks or security networks. In neighbor-integrity, it is understood that any failure vertex affects its neighbor vertices. In this paper we study the chordal graphs that are used to design communication networks and we show neighbor-integrity .

**ÖZET**

Her hangi bir yolla bir ağın bazı merkezlerinden veya iletişim hatlarından birinde ya da bir grubunda meydana gelecek bir bozulma, ağın fonksiyonunu yerine getirmesine engel olur. Hat kesilmeleri,düğüm tahripleri,yazılım hataları veya yapısal bozulmalar ve çevrim hataları uzun zaman peryotlarında ağ içinde kesintiye neden olur. Başlangıçta, ağın tasarımında bu tip bozulmalar dikkate alınmalıdır. Bir iletişim ağında zedelenebilirlik, iletişim hatlarının ya da istasyonlardan bazılarının bozulmasından sonra ağın bozulmaya direncini ölçer. İki ağın düğüm sayısı ve birleştirilebilirlik sayısı aynı iken, bozulmalardan sonra kalan en büyük parçalarının düğüm sayıları birbirinden farklı olabilir.Buradan, birleştirilebilirlik sayısı yeterince iyi bir zedelenebilirlik ölçümü değildir. Bir G çizgesini bir iletişim ağının modeli olarak düşünürsek, çizge kuramında iletişimin kararlılığı için pek çok parametre kullanılmaktadır. Özellikle güvenlik sistemleri ya da casusluk ağları için, komşu-bütünlük değeri çizgenin zedelenebilirliğinin bir ölçümüdür. Komşu bütünlük sayısının tanımında, bozulmuş bir düğümün komşularının da bozulduğu düşüncesi vardır. Bu çalışmada, iletişim ağlarının tasarımında kullanılan kiriş çizgelerin komşu-bütünlük sayıları çizgenin geçilebilirlik sayısı da dikkate alınarak hesaplanmıştır.

## 1. GİRİŞ

Genel olarak n işlemcinin bulunduğu bir iletişim ağında başlangıçta ağın tasarımında; en elverişli yapı dikkate alınmışsa daha sonra ortaya çıkabilecek gerek düğüm gerekse bağlantı bozulmalarında geride kalan parça ile işlem kısmen sürdürülebilir ve arıza giderimi kolaylaşır. Genel olarak bir iletişim ağı bir çizge ile modellenebilir. Bu durumda ağın en elverişli tasarımı, onun modeli olan çizgenin; çizge kuramındaki parametrelerle belirlenmiş en elverişli tasarımı olur. Çizge kuramında ağ tasarımı için; önceleri düğüm sayısı aynı olan iki çizge arasında birleştiriciliği (connectivity) büyük olanın seçilmesi yeterli olmaktaydı[2,3]. Ancak sonraki çalışmalarda görüldü ki tepe sayısı ve birleştiricilik sayısı aynı iki çizgeden her birisinde aynı sayıda düğümlerde bozulmalar ortaya çıktığında ,birisinde hala iletişimini sürdüren en büyük parçanın düğüm sayısı diğerinde hala iletişimini sürdüren en büyük parçanın düğüm sayısından daha fazladır. Bu yeni bir parametrenin tanımlanmasına sebep oldu. Bütünlük sayısı bir çizgede bozulan düğüm sayısı ile bozulmadan sonra hala iletişimini sürdürebilen düğüm sayısını en küçükleme biçiminde tanımlanmış bir sayıdır. Bütünlük sayısının tanımında bozulan tepelerin komşuluklarının da bozulduğu fikri yer almaz.Bu düşünce ile komşu-bütünlük sayısı tanımlanmıştır. Bir çizge için komşu-bütünlük sayısının bulunması, matematiksel olarak, tek değişkenli bir fonksiyonun minimumunu bulma problemidir.Bu değer bazı durumlarda çizgenin özel parametreleri aracılığında da hesaplanır. Arızalanmanın çizgenin ayrıtlarında meydana gelmesi halinde benzer biçimde ayrıt komşu-bütünlük sayısı da tanımlanmış ve çalışılmıştır [1,4,5,6,7,8,9, 10,11, 12].Genel olarak verilen herhangi bir çizgenin komşu-bütünlük sayısının hesabı problemi ,NP-tam bir problemdir. Çizge teorisi bu problemin çözülebilirliğini sağlamak amacıyla özel çizge sınıflarında komşu-bütünlük sayılarını hesaplamak yoluyla tasarımcılara yol göstermektedir.

## 2. ÇİZGELER VE KOMŞU-BÜTÜNLÜK SAYILARI

Birleştirilmiş bir çizge düğümler kümesi V,ayrıtlar kümesi E olmak üzere **G=(V,E)** olarak gösterilir. Bir çizge , problemin elemanları arasındaki bağıntının resmidir.Düğümler sayısı n, ayrıtlar sayısı m olarak kabul edilir. Bir çizgenin her düğüm çifti arasında en az bir yol varsa bu çizge **birleştirilmiş çizge** adını alır.Bu çalışmada ele alınan tüm çizgeler birleştirilmiş çizgelerdir.

### 2.1. Temel Çizgeler ve Gösterimleri

Bu bölümde birleştirilmiş temel çizge tipleri tanımlanmış ve sembolik gösterimleri verilmiştir.
**1)**Yol çizge : Bir çizgede n tane düğüm $v_1,v_2,\ldots,v_n$ biçiminde bir yolla iletişim halinde ise, buna n düğümü bir yol çizge denir ve $\mathbf{P_n}$ ile gösterilir.
**2)**Halka çizge: Bir yol çizgenin uç düğümleri çakışık ise buna halka çizge denir ve n düğümlü halka çizge $\mathbf{C_n}$ ile gösterilir.
**3)**Tam çizge: Bir çizgenin n tane düğümünün her biri diğer tüm düğümlere birer ayrıtla bitişik ise çizgeye tam çizge denir ve $\mathbf{K_n}$ ile gösterilir.
**4)**Yıldız çizge: Bir çizge içinde,bir düğüm diğer tüm düğümlere tam birer ayrıtla bitişik ise yıldız çizge adı verilir ve n+1 düğümlü yıldız çizge $\mathbf{S_{1,n}}$ ile gösterilir.
**5)**İki kümeli tam çizge: Bir çizgenin düğümler kümesi birbirine bitişik olmayan düğümlerden oluşan iki alt kümeye ayrılmış ve bir alt küme içindeki her düğüm diğer alt kümedeki tüm düğümler birer ayrıtla bitişikse, çizgeye iki kümeli tam çizge denir ve m+n düğümlü böyle bir bir çizge $K_{m,n}$ ile gösterilir .Bu tanım ikiden fazla küme için genelleştirilebilir.Böyle çizgelere çok parçalı tam çizge denir ve $K_{m,n,\ldots,r}$ biçiminde gösterilir.
**6)**Hiperküb çizge: d-boyuttan hiperküb çizge, $2^d$ tane düğümden sadece ikilik sistemdeki karşılıkları birer yuvar farklı olan düğümlerin birer ayrıtla birleştirilmesiyle tanımlanır ve $\mathbf{Q_d}$ ile gösterilir.
**7)**Dallanmış ağaç çizge:Bir çizgenin tüm düğümlerini içeren fakat hiçbir halkasını içermeyen alt çizgesine dallanmış ağaç çizge denir.

### 2.2. Çizgelerin Bazı Parametreleri ve Komşu Bütünlük Sayıları

Birleştirilmiş bir çizgeyi en az iki parçaya ayırmak için atılması gereken minimum düğüm sayısına düğüm birleştiricilik sayısı , minimum ayrıt sayısına da ayrıt birleştiricilik sayısı adı verilir. Bu sayı çizge içindeki her düğüm arasındaki ayrık ayrıtlı minimum yol sayısını gösterir.

Bir G çizgesinin bir düğümü v olsun.Bu düğüme bitişik tüm düğümlere v nin açık komşuluğu denir ve N(v) ile gösterilir. v nin kapalı komşuluğu $N[v]=\{v\cup N(v)\}$ kümesi olarak tanımlanır. Bir G çizigesinde $S \subset V$ olmak üzere {V-S} içindeki her tepe S nin kapalı komşuluğuna bitişik ise S kümesine G nin bir **geçilebilir kümesi**, G çizgesinin tüm geçilebilir kümeleri içinde en az düğüm içeren kümenin eleman sayısına da G çizgesinin **geçilebilirlik sayısı** denir ve **$\eta$(G)** ile gösterilir[6].

**Teorem 2.1.**:[6]**Geçilebilirlik sayısı** aşağıdaki temel çizgeler için:

i) $S_{1,n}$ yıldız çizgesi için 1, ii) $P_n$ yolu için $\left\lceil \frac{n}{5} \right\rceil$, iii) $C_n$ çevresi için $\left\lceil \frac{n}{5} \right\rceil$.

iv) $K_n$ tam çizgesi için 1, v) $\overline{K_n}$ boş çizgesi için 0, vi) $K_{m,n}$ iki kümeli tam çizgesi için 1.
vii) n düğümlü çok parçalı tam çizge için 1 .
olarak hesaplanmıştır.

**Teorem 2.2.**:[6] Birleştirilmiş bir G çizgesinin geçilebilirlik sayısının 1 olması için gerek ve yeter koşul G nin bir dallanmış ağacının bir yıldız çizge olmasıdır.

Bir G çizgesinin bir S düğüm alt stratejisi ,G nin düğümler kümesinden alınmış bir S alt kümesi ve onun kapalı komşuluğudur. G çizgesinin bir S düğüm alt stratejisi çıkarılmış alt çizgesi G\S ile gösterilir.

Birleştirilmiş bir G çizgesinin **komşu -bütünlüğü** NI(G) ile gösterilir ve

$$NI(G)= \min_{S\subseteq V(G)} \{|S| + c(G \setminus S)\}$$

olarak tanımlanır.Burada G nin bir düğüm alt stratejisi S ile , (G\S) alt çizgesinin birleştirilmiş alt çizgeleri içinde en çok düğüm içereninin düğüm sayısı da c(G\S) ile gösterilmiştir. [4,5].

n düğümlü $P_n$ yol çizgesinden uygun r tane düğüm çıkarıldığında geriye n-3r düğüm kalır ve kalan birleştirilmemiş çizgenin parça sayısı en çok r+1 olmaktadır. Bu halde geri kalan birleştirilmemiş çizgenin en büyük birleştirilmiş alt çizgesinin tepe sayısı en çok $\frac{n-3r}{r+1}$ olur.

Buradan $P_n$ yolunun komşu-bütünlük sayısının hesabında minimumu alınacak fonksiyon

$f(r)= r+\frac{n-3r}{r+1}$ bulunur. Yani $NI(P_n) \geq \min_r \left\{ r+\frac{n-3r}{r+1} \right\}$ dir.

$x \geq 0$ için $f(x)=x+(n-3x)/(x+1)$ fonksiyonunun minimum değeri $2\sqrt{x+3}-4$ Bütünlük sayısı pozitif bir tam sayı ile ifade edileceğinden ,üst tam sayı yuvarlaması yapılarak ,her n tam sayısı için $P_n$ yolunun komşu-bütünlüğü $\lceil 2\sqrt{n+3} \rceil -4$ olarak bulunur.

1) n >1 düğümlü $P_n$ yol çizgesi için $NI(P_n)=\lceil 2\sqrt{n+3} \rceil - 4$ .
2) n düğümlü $K_n$ tam çizgesi için $NI(K_n)=1$ .
3) n+1 düğümlü $K_{1,n}$ star çizgesi için $NI(K_{1,n})=1$ .
4) n düğümlü $C_n$ çevresi için

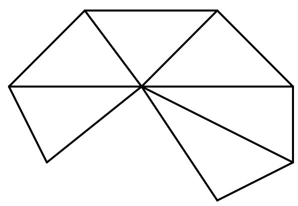
$$\mathrm{NI}(C_n)=\begin{cases}\lceil 2\sqrt{n}\,\rceil-3, & if \quad n\geq 5\\ 2, & if \quad n=4\\ 1, & if \quad n=3\end{cases}.$$

5) d boyutta $Q_d$ hipercubü için $\mathrm{NI}(Q_d)=2^{d-3}+1$.

## 3. KİRİŞ ÇİZGELERİN KOMŞU-BÜTÜNLÜK SAYILARI

Bir G çizgesinin ardışık olmayan iki düğümünü birleştiren ayrıta bir **kiriş(chord)** denir. Bir G çizgesine eğer 3 den daha fazla ayrıtlı her çevresi bir kirişe sahipse **kiriş çizge(chordal graph)** ya da **üçgenleştirilmiş çizge(trianglated graph)** adı verilir [15,21]. Genel olarak bir G çizgesinin kiriş çizge olması için gerek ve yeter şart , onun tek bir tepeyle başlanarak , var olan çizgenin bir tam alt çizgesine yeni bir tepeyi ekleme yoluyla adım adım elde edilebilir olmasıdır.Genelde kiriş çizgeler çizgelerin geniş bir sınıfını oluşturduklarından burada kiriş çizgelerden çok kullanılanlar üzerinde çalışılmıştır.

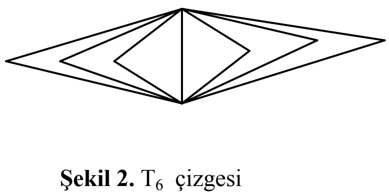
i) **Mücevher (gem) çizge**. Bir mücevher $P_n$ yol çizgesine bir düğümün eklenmesi ve bu düğümün yolun düğümlerinin tümüne birleştirilmesi olarak tanımlanır. Kısaca $M_{n+1}$ ile gösterilir. Bu aynı zamanda $K_2$ nin kiriş çizgelerinden biridir:$G_1$ i bulmak için $K_2$ ye bir düğüm eklenir. Bu düğüm merkez diye adlandırılır. Ardından bu merkez $K_2$ nin iki tepesine birleştirilir.$G_2$ için $G_1$ e bir düğüm eklenir ve bu düğüm $G_1$ in merkeze bitişik bir ayrıtının uç düğümlerine birleştirilir. Devamla $G_K$ çizgeleri bulunur.



**Şekil 1.** $M_8$ mücevher çizgesi

**Teorem 3.1:** n+1 düğümlü $M_{n+1}$ mücevherinin komşu-bütünlük sayısı 1 dir.
İspat : S kümesi olarak merkez düğüm seçilirse bunun kapalı komşuluğu G nin tüm düğümleri olur yani c(G\S)=0 dır.$\mathrm{NI}(M_{n+1})=1$ elde edilir.

ii)**Tabaka çizge**. $G_0 = K_2$ ile başlanır. Her seferinde $G_i$ çizgesine bir düğüm eklenir ve bu düğüm başlangıçta alınan $K_2$ çizgesinin düğümlerine birleştirilir. Kısaca $T_n$ ile gösterilir.

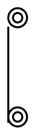


**Şekil 2.** $T_6$ çizgesi

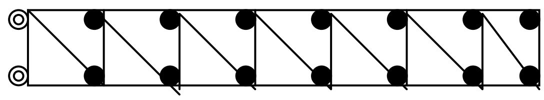
**Teorem 3.2.:** $n\geq 3$ için, $NI(T_n)=1$.
İspat :S kümesi olarak $K_2$ nin bir düğümü seçilirse bu düğümün kapalı komşuluğu çizgenin tüm düğümleri olur. $C(T_n \backslash S)=0$ dır. Böylece $n\geq 3$ için, $NI(T_n)=1$.
iii**) Üçgenlerin bir şelalesi(cascade)** olan $G_P$ çizgesi ardışık p adım işlemlerle aşağıdaki şekilde elde edilir:Başlangıç olarak $G_0=K_2$ tam çizgesi alınır. Eğer $G_i$ tanımlanmışsa $G_{i+1}$ çizgesi için, $G_i$ ye yeni bir tepe eklenir ve bu tepe $G_i$ nin bitişik iki tepesine birleştirilir.$K_2$ ile oluşturulmuş p adımlık bir şelale kısaca $(G_{K_2})_P$ ile gösterilir. p>3 için $(G_{K_2})_P$ çizgesinin geçilebilirlik sayısı $\left\lceil \frac{p}{5} \right\rceil$ e eşittir.

**Teorem 3.3**: p>3 için, $NI(G_{K_2})_P= \eta(G_{K_2})_P+3$ dir.

İspat: p>3 için $(G_{K_2})_P$ çizgesinin baskınlık sayısı $\left\lceil \frac{p}{5} \right\rceil$ e eşittir. $(G_{K_2})_P$ çizgesinden S olarak minimum geçilebilirlik kümesini alırsak kalan çizge ayrık $K_3$ alt çizgelerinden oluşur.Bu durumda
$NI(G_{K_2})_P=\eta(G_{K_2})_P+3$ olarak bulunur.



**Şekil 3.** $K_2$ çizgesi



**Şekil 4.** $K_2$ çizgesinin p=14 şelalesi

iv) **Yaprak Çizge**:$G_0=K_2$ çizgesi ile başlayarak , yeni eklenen tepeleri ardışık $p_1$ adımda aynı bir ayrıtın uç düğümlerine, ardından gelen ardışık $p_2$ adımda yeni eklenen düğümleri başka bir ayrıtın düğümlerine ve $p=p_1+p_2+\ldots+p_k$ olacak şekilde devamla elde edilen çizgelere **yaprak**(leaf) denir .Kısaca $L_p$ ile gösterilir.Yaprak çizgenin geçilebilirlik sayısı en azından 1 e eşittir.
**Teorem 3.4:** $p=p_1+p_2+\ldots+p_k$ olacak şekilde p adımla elde edilmiş bir yaprak çizge için$NI(L_p)=\eta(L_p)+1$ dir.
İspat: $L_p$ çizgesinin minimum geçilebilirlik kümesini S olarak seçersek ,bu düğümleri çizgeden çıkardığımızda tamamen ayrık düğümlerden oluşan birleştirilmemiş bir çizge elde edilir. Kalan birleştirilmemiş çizgenin en büyük bileşeninin boyutu 1 dir. Buradan $NI(L_p)=\eta(L_p)+1$ olur.

**4. SONUÇ**

Bir yapıyı göz önüne serme sürecinin hesap edilebilir maliyeti,sanal bir ortamdaki nesnelerin basit geometrik yapılarının sayısına doğrudan doğruya bağlıdır. Bu nesnelerin geometrik yapılarının sadeleştirilmesi maliyeti düşürmeye yeter. Üç boyutlu modelleme ya da animasyon paketleriyle nesneleri üretme; genel olarak dokuma yüzeyi bilgisi içerir. Eğer geometrik yapılar birer çizge olarak düşünülürse ayrıt büzme tekniği ile üç boyutlu yapılar düzlemsel ve üçgensel yapılara dönüştürülür[13]. Dönüşmüş çizgenin de sağlamlığı, bütünlüğü büyük bir yapı olması; bütünlük sayısının hesabı ile gerçeklenir. Bu düşüncenin gerçekleştiriminde komşuluk kavramı da işin içine sokulduğunda komşu-bütünlük sayısı önem kazanır.Bu çalışmadan amaç, şekilleri üçgensel forma çevirmede kullanılabilecek kiriş çizgelerin bazı özel sınıfları için komşu-bütünlük sayılarını hesaplayarak tasarımcılara öneriler getirmektir. Kiriş çizgelerin diğer sınıfları için de kararlılık parametrelerinin hesaplanması ileri çalışmalarımızın amacı olacaktır.

**KAYNAKLAR**


[1] Barefoot,C. A.- Entringer, R.- Swart ,H.( 1987),” Vulnerability in Graphs-A Comparative Survey”, *J.Combin. Math. Combin. Comput.* , pp. 113-22.

[2] Buckley ,F. - Harary, F.(1990), *Distance in Graphs*, Addison-Wesley Pub. California.

[3] Chartrand,G. - Lesniak, L.( 1986),*Graphs and Digraphs*,Wadsworth,California.

[4] Cozzens,M.B.( 1994),” Stability Measures and Data Fusion Networks”, *Graph Theory Notes of Newyork* XXVI, pp.8-14.

[5] Cozzens, M.B. - Wu,S.Y.( 1996),” Vertex Neighbor-integrity of Trees”, *Ars. Combin.*, 43, pp.169-180.

[6] Dündar, P( 2001),” Accessibility Number and The Neighbor-integrity of Generalised Petersen Graphs”, *Neural Network World,* Vol.2, pp.167-174.

[7] Dündar, P. (2001),” Stability Measures of Some Static Interconnection Networks*,” Int.J. Computer Math*., Vol.76-4, pp.455-462.

[8] Dündar,P.(1999),” Neighbor-integrity of Boolean Graphs and Its Compounds”, *Int.J.Comput. Math.Vol.* 72,pp.441-447.

[9] Dündar,P.(2000),”Neighbor-integrity of Sequential Joined Graphs” *,Int. J.Comput. Math.,* vol.74,pp.45-52.

[10] Dündar,P.(1999),”New Notions in Network Reliability:Stability Numbers of Sequential Joined Graphs”, *Neural Networks World,* No:5,pp.403-411.

[11] Dündar, P.-Dündar,S.”İletişim Ağlarının Kararlılığı İçin Yeni Ölçümler:Kiriş Çizgelerin Bütünlüğü”XXI Y.A.E.M.Kongresi,Kıbrıs,2000,pp.170-173.

[12] Dündar ,P.- Ozan,A. - Dündar ,S. (2002),”Bir İletişim Ağında Zedelenebilirlik Ölçümleri ve En Uygun Ağ Tasarımı”,YTÜ.Dergisi,vol.4,pp.56-66.

[13] Es,A.-İşler,V.(1999),”Simplification of Triangular Meshes Using Iterative Edge Contractions”, *Proceeding of ISCIS XIV*,İzmir, pp.884-891.