



**Araştırma Makalesi / Research Article**

**ANALYTICAL INVESTIGATION OF BUCKLING OF HEAVY COLUMN IN  
CONDITION OF WATER: COLUMN AT ITS TOP FIXED AND LOWER END  
MOVABLY HINGED COLUMN**

**Yeliz PEKBEY\***

*Ege Üniversitesi, Mühendislik Fakültesi, Makine Mühendisliği Bölümü, Bornova-İZMİR*

**Geliş/Received: 12.11.2007 Kabul/Accepted: 19.02.2008**

---

**ABSTRACT**

In 1744, the critical buckling load with the assumption of uniform cross-section without weight of column were computed by Euler. Whenever an economical solution is required, the weight of column must be considered for solution of buckling analyses. In literature, the critical buckling load and asymptotic behaviour of heavy column in condition of atmosphere have investigated for ten different support types. When this literature is examined, it is stated that the differential equations of for four different support types in condition of water is similar to condition of atmosphere. However, the differential equations of other four different support types in condition of water is different from to condition of atmosphere. And it is stated that the critical buckling load these different support types in condition of water is not calculated from condition of atmosphere. The goals of this paper are to develop self weight buckling of column at its top fixed and lower end movably hinged column in condition of water. This paper, presents a analytical method for calculating the critical buckling load of the heavy column.

**Keywords:** Columns, buckling in water, Bessel-Hankel function, dimensionless critical buckling load, dimensionless critical length.

**AĞIRLIĞI DİKKATE ALINAN BİR KİRİŞİN SUDA BURKULMASININ ANALİTİK OLARAK İNCELENMESİ: ÜST UCU ANKASTRE VE ALT UCU MAFSALLI, KAYICI BASİT MESNETLİ OLMA DURUMU**

**ÖZET**

EULER, 1744 yılında sabit enine kesitli çubukların kritik burkulma kuvvetlerini, çubuk ağırlığını ihmal ederek hesaplamıştır. Daha ekonomik çubuklar için, çubuk ağırlığının da dikkate alınması ve çözüm yapılması gerekir. Literatürde, değişik 10 mesnetleme durumları için çubuk ağırlığı da dikkate alınarak hava ortamında kritik burkulma kuvvetleri ve asimptotik burkulma kuvvetleri hesaplanmış ve bu kuvvetlerden hareketle 4 mesnetleme durumu için sudaki kritik kuvvetlerin bulunabileceği, diğer 6 mesnetleme durumuna ait sudaki kritik burkulma kuvvetlerinin ise havadakinden hesaplanamayacağı belirtilmiştir. Bu çalışmada, bugüne kadar kritik burkulma kuvvetleri hesaplanmamış, üst ucu ankastre ve alt ucu mafsalı, kayıcı basit mesnetli olan sudaki çubuk için çözüm verilmiştir.

**Anahtar Sözcükler:** Kolonlar, sudaki burkulma, Bessel-Hankel fonksiyonları, boyutsuz kritik burkulma kuvveti, boyutsuz çubuk uzunluğu.

---

\* e-mail/e-ileti: yeliz.pekbey@ege.edu.tr, tel: (232) 388 85 62

## 1. GİRİŞ

Ağırlığı dikkate alınan uzun çubuklardaki burkulma problemi, yapısal mekanikte en temel problemlerden biridir. Kendi ağırlık kuvveti etkisi altında bir çubuğun burkulması, üniform yayılı, eksenel kuvvete maruz bir çubuğun stabilite problemi olarak ifade edilmektedir [1]. Euler [2], 1744 yılında sabit enine kesitli çubukların kritik burkulma kuvvetlerini, çubuk ağırlığını ihmal ederek, dört mesnetleme durumu için hesaplamıştır. Daha ekonomik çubuklar için, çubuk ağırlığının da dikkate alınması ve çözüm yapılması gerekir. İlk olarak Willers [3], ağırlığı dikkate alınan bir çubuğun stabilitesini incelemiştir. Greenhill [4] ise, ağırlığı dikkate alınan, alt ucu ankastre, üst ucu serbest sınır koşullarına sahip olan bir çubuğun burkulma davranışını incelemiştir.

Ağırlığı dikkate alınan bir çubuğun kritik burkulma kuvveti, çubuğun hava veya su ortamında bulunmasına göre farklılık gösterecektir. Bu fark, su ortamında, hava ortamına göre ek olarak akışkan kaynaklı hidrostatik basınç kuvvetinin etkimesinden kaynaklanmakta olup, kendisini, problemin diferansiyel denkleminde göstermektedir. Plunkett [5], Sugiyama ve Ashida [6] ise, denizcilikte sondajlamada kullanılan, ağırlığı dikkate alınan çubukların, kritik burkulma kuvvetini, sırasıyla asimptotik ve seri çözümü ile bulmuşlardır. Ayrıca, Bernitsas ve Kokkinis [7] de asimptotik çözümü, Airy fonksiyonunu kullanarak yapmışlardır. Özdamar [8], değişik 10 mesnetleme durumu için çubuk ağırlığını da dikkate alarak hava ortamında kritik burkulma kuvvetlerini ve asimptotik burkulma kuvvetlerini hesaplamış ve bu kuvvetlerden hareketle 4 mesnetleme durumu için sudaki kritik kuvvetlerin bulunabileceğini, diğer 6 mesnetleme durumuna ait sudaki kritik burkulma kuvvetlerinin ise havadakinden hareketle hesaplanamayacağını belirtmiştir. Üst ucu ankastre ve alt ucu mafsallı, kayıcı basit mesnetli olan çubuk, hesaplanamayacağı iddia edilen mesnetleme durumudur.

Bu çalışmada amaç, literatürde bugüne kadar çözümü yapılmamış olan su ortamındaki üst ucu ankastre ve alt ucu mafsallı, kayıcı basit mesnetli olan çubuğa ait kritik burkulma kuvvetlerinin hesaplanmasıdır. Bu amaç için, öncelikle, problemin diferansiyel denklemi su ortamı için çıkarılacaktır. Daha sonra, problem Bessel ve Hankel Fonksiyonları kullanılarak analitik olarak çözülecektir. Bu çözüm, asimptotik çözüm olarak adlandırılan çok uzun kırılgarlıkta burkulma değerini de vermektedir.

## 2. PROBLEMİN DİFERANSİYEL DENKLEMİ

Bu çalışmada, ağırlığı dikkate alınan, su içinde basınca zorlanan bir çubuğun hareketinin diferansiyel denklemi çıkartılacaktır. Şekil 1 'de, ağırlığı dikkate alınan, su içerisinde, statik denge durumundaki bir çubuk görülmektedir.

Şekil 2' de ise, ağırlığı dikkate alınan ve çok küçük bir  $ds$  uzunluğunda bir eleman görülmektedir. Bu elemanda denge denklemleri aşağıdaki şekilde yazılabilir:

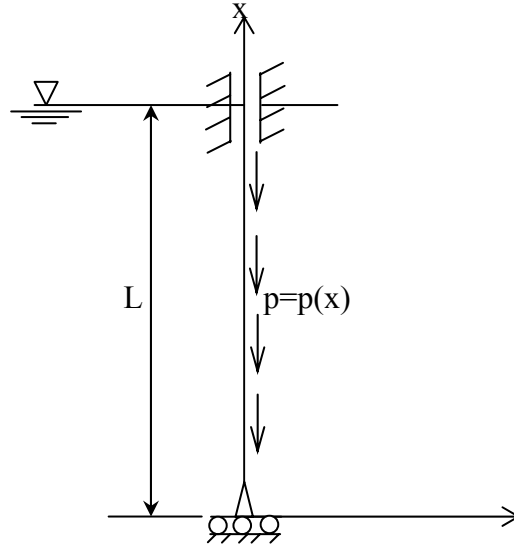
$$\sum F_x = 0 \Rightarrow \frac{d\bar{N}(x)}{ds} = p(x) - q_f(x) \sin \alpha \quad (1)$$

$$\sum F_z = 0 \Rightarrow \frac{d\bar{Q}(x)}{ds} = -q(x) - q_f(x) \cos \alpha \quad (2)$$

$$\sum M = 0 \Rightarrow \bar{N}(x) dw(x) - \bar{Q}(x) dx + d\bar{M}(x) = 0 \quad (3)$$

Burada,  $\bar{M}(x)$  ile eğilme momenti kesit zoru,  $\bar{N}(x)$  ile eksenel veya normal kuvvetin x bileşeni,  $\bar{Q}(x)$  ile kesme kuvveti kesit zoru x bileşeni,  $q_f(x)$  ile , hidrostatik

basınçtan doğan yayılı yükü,  $q(x)$  ile su içerisinde çubuğa etkiyen yayılı yükü,  $p(x)$  ile çubukta birim uzunluk başına gelen gelen ağırlık kuvveti simgelenmiştir. Ayrıca denklemlerde,  $w(x)$ ,  $w'(x)$ ,  $w''(x)$  ifadeleri, sırasıyla, çökme fonksiyonunu ve çökme fonksiyonunun  $x'$  e göre birinci ve ikinci türevlerini göstermektedir.



Şekil 1. Su içerisinde statik denge durumundaki çubuk

Çubuğun içi boş ise veya içinde sıvı varsa,  $\gamma_s$ , sıvının özgül ağırlığı ifade etmek üzere, çubuğun birim uzunluk başına gelen kuvvet,  $p(x) = p_0 = \gamma_s A = \text{sabit}$  ile yazılabilir. Ayrıca, çubuk,  $\gamma_f$  özgül ağırlığına sahip sıvının içinde olmasından dolayı, çubuğa, hidrostatik basınçtan doğan bir yayılı yük ( $q_f(x)$ ) etkiyecektir, ki bu değer,

$$q_f(x) = \gamma_f A [w'(x) - (L-x)w''(x)] \quad (4)$$

olarak da ifade edilmektedir [8].

(3) nolu denklem  $ds$ 'e bölünürse,

$$\bar{N}(x) \frac{dw(x)}{ds} - \bar{Q}(x) \frac{dx}{ds} + \frac{dM(x)}{ds} = 0 \quad (5)$$

elde edilir. (1), (2) ve (5) nolu denklemler  $\frac{ds}{dx}$  ile çarpılır ve meydana gelen küçük çökmeler

nedeniyle  $\sin \alpha \cong 0$ ,  $\cos \cong 1$  alınırsa,

$$\frac{d\bar{N}(x)}{dx} \equiv \bar{N}'(x) = p(x) \frac{ds}{dx} \quad (6)$$

$$\frac{d\bar{Q}(x)}{dx} \equiv \bar{Q}'(x) = -q(x) \frac{ds}{dx} + q_f(x) \frac{ds}{dx} \quad (7)$$

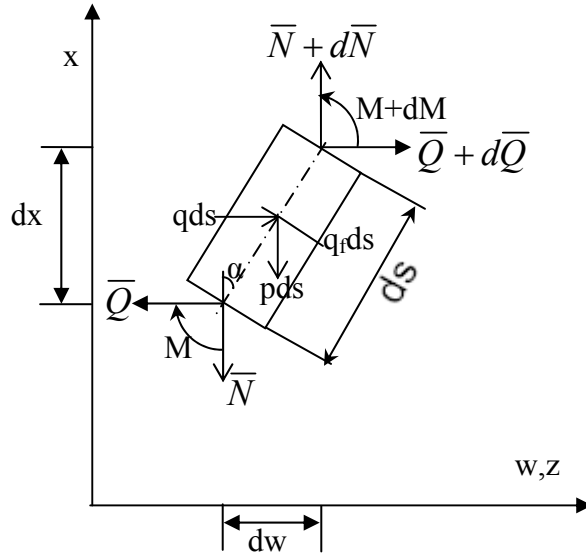
$$\bar{N}(x) \frac{dw(x)}{dx} - \bar{Q}(x) + \frac{dM(x)}{dx} \equiv \bar{N}(x)w'(x) - \bar{Q}(x) + M'(x) = 0 \quad (8)$$

denklemleri elde edilecektir.  $ds \approx dx$  olarak yazılabileceğinden, bu denklem sistemi aşağıdaki şekle dönüşür:

$$\bar{N}'(x) = p(x) \quad (9)$$

$$\bar{Q}'(x) = -q(x) + q_f(x) \quad (10)$$

$$M'(x) = \bar{Q}(x) - \bar{N}(x)w'(x) \quad (11)$$



Şekil 2. Kesit Büyüklükleri

(11) nolu denklemin türevi alınır ve (10) nolu denklemde  $\bar{Q}'(x)$  yerine yazılırsa, (13) nolu denklem elde edilmiş olur. (13) nolu denklemin elde edilmesinde, (12) nolu denklem ile gösterilen elastik eğri denkleminde de yararlanılmıştır.

$$M(x) = -EIw''(x) \quad (12)$$

$$EIw'''(x) = -\bar{Q}'(x) + (\bar{N}(x)w'(x))' = q(x) - q_f(x) + (\bar{N}(x)w'(x))'$$

veya (13)

$$EIw'''(x) - (\bar{N}(x)w'(x))' = q(x) - q_f(x)$$

Bu denklemde verilen,  $\bar{N}(x)$  aksel veya normal kuvvet ifadesini açık bir şekilde yazmaya çalışalım. (9) nolu denklem,  $p(x) = p_0 = \gamma_s A = \text{sabit}$  olmak üzere, x üzerinden entegrasyon işlemi gerçekleştirilirse,

$$\bar{N}(x) = p_0(x) + c_1 = \gamma_s Ax + c_1 \quad (14)$$

olur. Bu denklemde yer alan,  $c_1$ , sabittir ve incelenen duruma göre sınır şartlarından belirlenir. Buna göre, bu çalışmada incelenen mesnetleme durumuna göre,  $x=0$ 'da,  $N=0$  olmasından dolayı,

$$\bar{N}(0) = c_1 = -P - \gamma_f AL \quad (15)$$

yazılabilir. Böylece (14) nolu denklem,  $c_1$ , sabitinin yerine konmasıyla,

$$\bar{N}(x) = \gamma_s Ax - \gamma_f AL - P \quad (16)$$

şekline dönüşür. Buna göre, (13) nolu denklemde, (16) nolu denklemin kullanılmasıyla,

$$EIw'''(x) - [A(\gamma_s x - \gamma_f L)w'(x) - Pw'(x)] = q(x) - q_f(x) \quad (17)$$

elde edilmiş olur. Ayrıca bu denklem,

$$EIw^{iv}(x) - [A\gamma_s w'(x) + A(\gamma_s x - \gamma_f L)w''(x) - Pw''(x)] = q(x) - q_f(x)$$

veya

$$EIw^{iv}(x) - [A\gamma_s w'(x) + w''(x)(A(\gamma_s x - \gamma_f L) - P)] = q(x) - q_f(x) \quad (18)$$

şeklinde de yazılabilir. Suyun hareketsiz ve akıntının olmaması,  $q(x) = 0$  şartını getirir. Dolayısıyla, (18) nolu denklemde  $q(x) = 0$  ve (4) nolu denklemde verilmiş olan,  $q_f(x)$ , yerine yazılırsa,

$$EIw^{iv}(x) - [A\gamma_s w'(x) + w''(x)(A(\gamma_s x - \gamma_f L) - P)] = -\gamma_f A[w'(x) - (L - x)w''(x)]$$

(19) nolu denklem elde edilmiş olur:

$$EIw^{iv}(x) + [P - (\gamma_s - \gamma_f)Ax]w''(x) - (\gamma_s - \gamma_f)Aw'(x) = 0$$

veya

$$EIw^{iv}(x) + [[P - (\gamma_s - \gamma_f)Ax]w'(x)]' = 0 \quad (19)$$

İncelenen mesnetleme durumunun,  $x=0$ 'daki sınır şartlarını elde etmek için, (19) nolu denklemin entegrasyon ile

$$w'''(x) + \left[ \frac{P}{EI} - \frac{(\gamma_s - \gamma_f)A}{EI} x \right] w'(x) = k \quad (20)$$

bulunur. Burada, k entegrasyon sabitini gösterir. (20) nolu diferansiyel denklem,

$$a = \frac{\gamma_s A}{EI}, b = \frac{P}{\gamma_s A}, \theta = \frac{\gamma_f}{\gamma_s} \quad (21)$$

kısaltmalarıyla yerine yazıldığında,

$$w'''(x) + a[b - (1 - \theta)x]w'(x) = k \quad (22)$$

elde edilir. Bu diferansiyel denklemin çözümü için,

$$\zeta(x) = \frac{2}{3} \sqrt{a} \sqrt{(b + \theta x - x)^3} \quad (23)$$

$$\frac{dw(x)}{dx} = \zeta^{1/3} \phi(\zeta(x)) \quad (24)$$

denklemleri ile verilen yeni değişken ( $\zeta(x)$ ) ve yeni fonksiyon ( $\phi(\zeta(x))$ ) tanımlansın. (24) nolu denklemin türevi alınacak olursa,

$$\frac{d^2 w(x)}{dx^2} = \frac{1}{3} \zeta^{-2/3} \frac{d\zeta}{dx} \phi(\zeta(x)) + \zeta^{1/3} \frac{d\phi}{d\zeta} \frac{d\zeta}{dx} \quad (25)$$

bulunur. Bu denklemde yer alan,  $\frac{d\zeta}{dx}$  ifadesi, (23) nolu denklemden hareketle,

$$\frac{d\zeta}{dx} = \frac{2}{3} \sqrt{a} \frac{3}{2} (b + \theta x - x)^{1/2} (\theta - 1) = \sqrt{a} (b + \theta x - x)^{1/2} (\theta - 1) \quad (26)$$

elde edilir. Ayrıca, yine bu denklemden hareketle,

$$b + \theta x - x = \left[ \frac{3}{2} a^{-1/2} \zeta(x) \right]^{2/3} = \left[ \frac{3\zeta}{2\sqrt{a}} \right]^{2/3} \quad (27)$$

bulunur. Buna göre, (26) ve (27) nolu denklemlerin, (24) nolu denklemde yerine yazılmasıyla,

$$\frac{d^2 w(x)}{dx^2} = \left( \frac{3a}{2} \right)^{1/3} (\theta - 1) \left[ \frac{1}{3} \zeta^{-1/3} \phi(\zeta) + \zeta^{2/3} \phi'(\zeta) \right] \quad (28)$$

bulunur. Buna göre,  $\frac{d^3 w(x)}{dx^3}$ , ifadesi (28) nolu denklem yardımıyla,

$$\frac{d^3 w(x)}{dx^3} = \left( \frac{3a}{2} \right)^{2/3} (\theta - 1)^2 \left[ -\frac{\phi(\zeta)}{9\zeta} + \phi'(\zeta) + \zeta \phi''(\zeta) \right] \quad (29)$$

elde edilir. Böylece,  $x=0$ 'da (22) nolu denklem ile verilen sınır şartı,

$$\left( \frac{3a}{2} \right)^{2/3} (\theta - 1)^2 \left[ -\frac{\phi(\zeta)}{9\zeta} + \phi'(\zeta) + \zeta \phi''(\zeta) \right] + a[b + \theta x - x] \zeta^{1/3} \phi(\zeta) = k \quad (30)$$

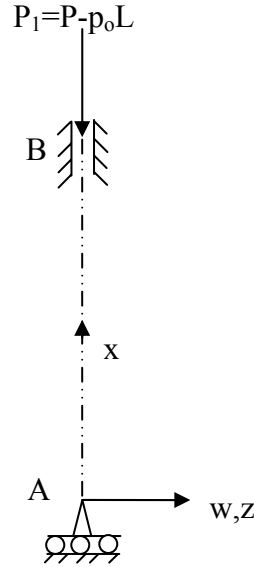
veya

$$\phi''(\zeta) + \frac{1}{\zeta} \phi'(\zeta) + \left[ \frac{1}{(\theta - 1)^2} - \frac{1}{9\zeta^2} \right] \phi(\zeta) = \frac{c_1}{\zeta}, c_1 = \frac{k}{\left( \frac{3a}{2} \right)^{2/3} (\theta - 1)^2} \quad (31)$$

elde edilmiş olur.

### 3. PROBLEMİN BESSEL-HANKEL FONKSİYONLARI İLE HAVADA VE SUDAKİ ÇÖZÜMÜ

Bu çalışmada, bugüne kadar kritik burkulma kuvvetleri hesaplanmamış, üst ucu ankastre ve alt ucu mafsalı, kayıcı basit mesnetli olan, ağırlığı dikkate alınan sudaki kiriş için çözüm yapılacaktır. İncelenecek olan durum ve sınır şartları Şekil 3 ve Çizelge 1’de görülmektedir. Yapılacak olan çözümde, problemin en genel şartlardaki diferansiyel denklemi çıkartılarak, çözüm, hem hava hem de su için yapılacaktır. Dolayısıyla Çizelge 1’de sınır şartları hem hava hem de su için verilmiştir.



Şekil 3. İncelenen mesnetleme durumu

Çizelge 1. İncelenen mesnetleme durumuna ilişkin sınır şartları

Sınır Şartları	A noktası (x=0)	B noktası (x=L)
Havada	$w_A'' = 0$ $w_A''' + abw_A' = 0$	$w_B = 0$ $w_B' = 0$
Suda	$w_A'' = 0$ $w_A''' + \left[ ab + \frac{\gamma_f AL}{EI} \right] w_A' = 0$	$w_B = 0$ $w_B' = 0$

(31) nolu denklem ile verilen diferansiyel denklem,

$$\beta^2 = \frac{1}{(\theta - 1)^2} \quad (32)$$

kabulü ile,

$$\zeta^2 \phi''(\zeta) + \zeta \phi'(\zeta) + [\beta^2 \zeta^2 - (\frac{1}{3})^2] \phi(\zeta) = c_1 \zeta \quad (33)$$

haline dönüşmüş olur. Bu diferansiyel denklemin çözümü ise,  $c_2$  ve  $c_3$  entegrasyon sabitleri olmak üzere,

$$\phi(\zeta) = c_2 J_{\sqrt{(\frac{1}{3})^2 + c_1}}(\beta \zeta) + c_3 Y_{\sqrt{(\frac{1}{3})^2 + c_1}}(\beta \zeta) \quad (34)$$

şekline dönüşür. İncelenen mesnetleme durumu için, alt uçta  $Q(x) = 0$  sınır şartından,  $k$

dolayısıyla,  $c_1 = \frac{k}{(\frac{3a}{2})^{2/3}(\theta - 1)} = 0$  olmaktadır. Buna göre, (34) nolu denklem,

$$\phi(\zeta) = c_2 J_{1/3}(\beta \zeta) + c_3 Y_{1/3}(\beta \zeta) \quad (35)$$

olur. Bu denklemlerde yer alan,  $J_{1/3}$  ve  $Y_{1/3}$  ifadeleri ise, sırasıyla BESSEL ve HANKEL fonksiyonlarını göstermektedir ve aşağıdaki şekilde yazılmaktadır [9]:

$$J_{1/3}(\beta \zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (\beta \zeta)^{2n + \frac{1}{3}}}{2^{2n + \frac{1}{3}} n! \Gamma(\frac{1}{3} + n + 1)}, J_{-1/3}(\beta \zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (\beta \zeta)^{2n - \frac{1}{3}}}{2^{2n - \frac{1}{3}} n! \Gamma(-\frac{1}{3} + n + 1)} \quad (36)$$

$$Y_{1/3} = \frac{\cos \frac{\pi}{3} J_{1/3}(\beta \zeta) - J_{-1/3}(\beta \zeta)}{\sin \frac{\pi}{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} J_{1/3}(\beta \zeta) - \frac{2}{\sqrt{3}} J_{-1/3}(\beta \zeta) \quad (37)$$

Buna göre, (37) nolu denklemde yer alan Bessel fonksiyonları;

$$J_{1/3}(\beta \zeta) = \frac{(\beta \zeta)^{1/3}}{2^{1/3} \Gamma(\frac{1}{3} + 1)} - \frac{(\beta \zeta)^{1/3+2}}{2^{1/3+2} \Gamma(\frac{1}{3} + 2)!} + \frac{(\beta \zeta)^{1/3+4}}{2^{1/3+4} \Gamma(\frac{1}{3} + 3)2!} - \dots \quad (38)$$

$$J_{-1/3}(\beta \zeta) = \frac{(\beta \zeta)^{-1/3}}{2^{-1/3} \Gamma(-\frac{1}{3} + 1)} - \frac{(\beta \zeta)^{-1/3+2}}{2^{-1/3+2} \Gamma(-\frac{1}{3} + 2)!} + \frac{(\beta \zeta)^{-1/3+4}}{2^{-1/3+4} \Gamma(-\frac{1}{3} + 3)2!} - \dots \quad (39)$$

olarak da verilebilir. Bu denklemlerde yer alan  $\Gamma$  ifadesi ise Gamma fonksiyonu olarak isimlendirilmektedir [9].

(23) nolu denklem,



$$\xi = \frac{x}{b} \quad (40)$$

yeni değişkeni ile,

$$\zeta = \frac{2}{3} \sqrt{a} \sqrt{(b + \theta b \xi - b \xi)^3} = \frac{2}{3} a^{1/2} b^{3/2} (1 + \theta \xi - \xi)^{3/2} \quad (41)$$

$$\eta_u = \frac{2}{3} a^{1/2} b^{3/2} \Rightarrow \zeta = \eta_u [1 + \xi(\theta - 1)]^{3/2}$$

dönüşmüş olur.  $\zeta$  değişkeni,  $\xi$  nin alacağı değerlere göre incelenmelidir:

$$a) 1 + \xi(\theta - 1) > 0 \Rightarrow \xi > \frac{-1}{\theta - 1} = \frac{1}{1 - \theta} \Rightarrow \zeta, \text{ pozitifveeldir}$$

$$b) 1 + \xi(\theta - 1) = 0 \Rightarrow \xi = \frac{-1}{\theta - 1} \Rightarrow \zeta = 0$$

c)

$$1 + \xi(\theta - 1) < 0 \Rightarrow \xi < \frac{-1}{\theta - 1} \Rightarrow \zeta = \eta_u [1 + \xi(\theta - 1)]^{3/2} = \eta_u (-1)^{3/2} [\xi(1 - \theta) - 1]^{3/2}$$

$$\zeta = \pm \eta_u [\xi(1 - \theta) - 1]^{3/2} i, \eta = \eta_u [\xi(1 - \theta) - 1]^{3/2} \text{ kusaltmasıyla} \quad (42)$$

$$\zeta = \pm \eta i$$

Buna göre,

$$x = 0 \Rightarrow \xi = 0, \zeta = \eta_u$$

$$x = L \Rightarrow \xi = \pm \eta_u [\alpha(1 - \theta) - 1]^{3/2} i = \pm \eta_o i, \eta_o = \eta_u [\alpha(1 - \theta) - 1]^{3/2} \quad (43)$$

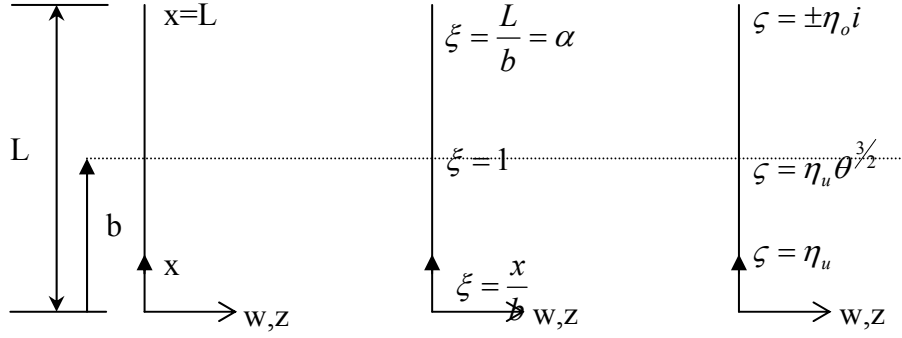
dir. Ayrıca,

$$\xi = \frac{x}{b}, x = L \text{ için } \xi = \frac{L}{b} = \alpha \quad (44)$$

olarak tanımlanmaktadır. Şekil 4'de değişik koordinat sistemleri arasındaki ilişkiler görülmektedir.

Buna göre (24) nolu denklem,

$$\frac{dw}{dx} = \zeta^{1/3} \phi(\zeta(x)) = \zeta^{1/3} [c_2 J_{1/3}(\beta \zeta) + c_3 Y_{1/3}(\beta \zeta)] \quad (45)$$



Şekil 4. Değişik koordinat sistemleri arasındaki ilişkiler

yazılır ve entegre edilirse,  $x=L$  için geçerli olan sınır şartını bulmuş oluruz:

$$\frac{dw}{dx}(x=L) = [\alpha(1-\theta) - 1]^{1/2} [c_2 F17(\alpha, \eta_u, \theta) + c_3 F18(\alpha, \eta_u, \theta)] = 0 \quad (46)$$

Bu denklemde yer alan  $F17(\alpha, \eta_u, \theta)$  ve  $F18(\alpha, \eta_u, \theta)$  ifadeleri de aşağıdaki şekilde yazılabilir:

$$F17(\alpha, \eta_u, \theta) = \frac{-1}{2^{1/3} \Gamma(\frac{1}{3})} [3\beta^{1/3} \eta_u^{2/3} [\alpha(1-\theta) - 1] + \frac{3^2 \beta^{7/3} \eta_u^{8/3} [\alpha(1-\theta) - 1]^4}{1!.2^2.4.1} + \quad (47)$$

$$\frac{3^3 \beta^{13/3} \eta_u^{14/3} [\alpha(1-\theta) - 1]^7}{2!.2^4.7.4.1} + \frac{3^4 \beta^{19/3} \eta_u^{20/3} [\alpha(1-\theta) - 1]^{10}}{3!.2^6.10.7.4.1} + \dots]$$

$$F18(\alpha, \eta_u, \theta) = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \left(\frac{-1}{2^{1/3} \Gamma(\frac{1}{3})}\right) [3\beta^{1/3} \eta_u^{2/3} [\alpha(1-\theta) - 1] + \frac{3^2 \beta^{7/3} \eta_u^{8/3} [\alpha(1-\theta) - 1]^4}{1!.2^2.4.1} +$$

$$\frac{3^3 \beta^{13/3} \eta_u^{14/3} [\alpha(1-\theta) - 1]^7}{2!.2^4.7.4.1} + \frac{3^4 \beta^{19/3} \eta_u^{20/3} [\alpha(1-\theta) - 1]^{10}}{3!.2^6.10.7.4.1} + \dots] - \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right) \left(\frac{2^{1/3}}{\Gamma(\frac{2}{3})}\right) [\beta^{-1/3} +$$

$$\frac{3\beta^{5/3} \eta_u^2 [\alpha(1-\theta) - 1]^3}{1!.2^2.2} + \frac{3^2 \beta^{11/3} \eta_u^4 [\alpha(1-\theta) - 1]^6}{2!.2^4.5.2} + \frac{3^3 \beta^{17/3} \eta_u^6 [\alpha(1-\theta) - 1]^9}{3!.2^6.8.5.2} +$$

$$\frac{3^4 \beta^{23/3} \eta_u^8 [\alpha(1-\theta) - 1]^{12}}{4!.2^8.11.8.5.2} + \dots]$$

(48)

$x=L$ 'de, yani çubuğun üst ucu ankastre olmasından dolayı, bir diğer sınır şartı da, bu noktadaki çökme değerinin sıfır olmasıdır. Buna göre,

$$w(x = L) = \left(\frac{1}{\theta - 1}\right)\left(\frac{2}{3a}\right)^{1/3} [c_2 F2(\alpha, \eta_U, \theta) + c_3 F3(\alpha, \eta_U, \theta) + c_4] = 0 \quad (49)$$

yazılabilir. Bu denklemde yer alan  $F2(\alpha, \eta_U, \theta)$  ve  $F3(\alpha, \eta_U, \theta)$  ifadeleri de aşağıdaki şekilde yazılabilir:

$$F2(\alpha, \eta_U, \theta) = \frac{1}{2^{1/3} \Gamma(\frac{1}{3})} \left[ \frac{3^2 \beta^{1/3} \eta_U^{4/3} [\alpha(1-\theta) - 1]^2}{4} + \frac{3^3 \beta^{7/3} \eta_U^{10/3} [\alpha(1-\theta) - 1]^5}{1!.2^2.10.4.1} + \frac{3^4 \beta^{13/3} \eta_U^{16/3} [\alpha(1-\theta) - 1]^8}{2!.2^4.16.10.7.4.1} + \dots \right] \quad (50)$$

$$F3(\alpha, \eta_U, \theta) = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\left(\frac{1}{2^{1/3} \Gamma(\frac{1}{3})}\right) \left[ \frac{3^2 \beta^{1/3} \eta_U^{4/3} [\alpha(1-\theta) - 1]^2}{4} + \frac{3^3 \beta^{7/3} \eta_U^{10/3} [\alpha(1-\theta) - 1]^5}{1!.2^2.10.4.1} + \frac{3^4 \beta^{13/3} \eta_U^{16/3} [\alpha(1-\theta) - 1]^8}{2!.2^4.16.10.7.4.1} + \dots \right] + \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)\left(\frac{1}{2^{2/3} \Gamma(\frac{2}{3})}\right) \left[ \frac{3 \beta^{-1/3} \eta_U^{2/3} [\alpha(1-\theta) - 1]}{1} + \frac{3^2 \beta^{5/3} \eta_U^{8/3} [\alpha(1-\theta) - 1]^4}{1!.2^2.8} + \frac{3^4 \beta^{11/3} \eta_U^{14/3} [\alpha(1-\theta) - 1]^7}{2!.2^4.8.5.14} + \dots \right] \quad (51)$$

Çubuğun alt ucundaki sınır şartlarına bağlı olarak, aşağıdaki denklemleri yazabiliriz:

$x=0$  için geçerli olan sınır şartını yazalım.

$$\frac{d^2 w}{dx^2} = \frac{d}{d\zeta} \left( \frac{dw}{dx} \right) \frac{d\zeta}{dx} \quad (52)$$

(45) nolu denklemin kullanılmasıyla,

$$\frac{d^2 w}{dx^2} = (\theta - 1) \left(\frac{3a}{2}\right)^{1/3} [c_2 F11(\eta_U) + c_3 F12(\eta_U)] = 0 \quad (53)$$

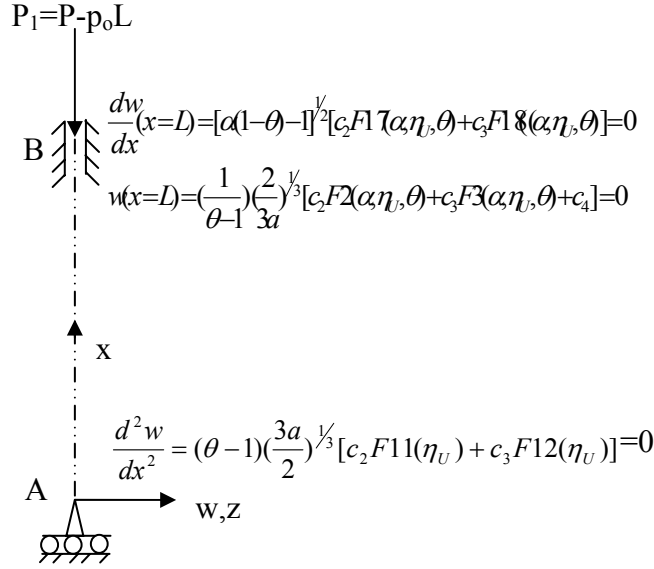
bulunur. Ayrıca,

$$F11(\eta_U) = \left(\frac{1}{2^{1/3} \Gamma(\frac{1}{3})}\right) \left[ 2\beta^{1/3} - \frac{3.8.\beta^{7/3} \eta_U^2}{1!.2^2.4.1} + \frac{3^2.14.\beta^{13/3} \eta_U^4}{1!.2^4.7.4.1} - \frac{3^3.20.\beta^{19/3} \eta_U^6}{3!.2^6.10.7.4.1} + \dots \right] \quad (54)$$

$$F12(\eta_U) = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\left(\frac{1}{2^{1/3}\Gamma(\frac{1}{3})}\right)\left[2\beta^{1/3} - \frac{3.8.\beta^{7/3}\eta_U^2}{1!.2^2.4.1} + \frac{3^2.14.\beta^{13/3}\eta_U^4}{1!.2^4.7.4.1} - \frac{3^3.20.\beta^{19/3}\eta_U^6}{3!.2^6.10.7.4.1} + \dots\right] - \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)\left(\frac{2^{1/3}}{\Gamma(\frac{2}{3})}\right)\left[-\frac{2.3.\beta^{5/3}\eta_U^{4/3}}{1!.2^2.2.1} + \frac{4.3^2.\beta^{11/3}\eta_U^{10/3}}{2!.2^4.5.2.1} - \frac{6.3^3.\beta^{17/3}\eta_U^{16/3}}{3!.2^6.8.5.2.1} + \dots\right]$$

(55)

dir.



Şekil 5. İncelenen mesnetleme durumuna ilişkin bulunan denklemler

Buraya kadar, problemin en genel durumdaki diferansiyel denklemini çıkartılmış ve incelenen mesnetleme durumu için sınır şartları elde edilmiştir. Bundan sonra, ağırlığı dikkate alınan havadaki ve sudaki bir çubuğun burkulma davranışı incelenecektir. Şekil 5’de incelenen duruma ilişkin elde edilen denklemler görülmektedir.

Problemin, sıfırdan farklı bir çözümünün olabilmesi için, denklem takımının katsayılar determinantı sıfır olmalıdır:

$$\begin{vmatrix} F2(\alpha, \eta_U, \theta) & F3(\alpha, \eta_U, \theta) & 1 \\ F17(\alpha, \eta_U, \theta) & F18(\alpha, \eta_U, \theta) & 0 \\ F11(\eta_U) & F12(\eta_U) & 0 \end{vmatrix} = 0$$

(56)

Bu determinant açılırsa,

$$F17(\alpha, \eta_U, \theta).F12(\eta_U) - F18(\alpha, \eta_U, \theta).F11(\eta_U) = 0$$

(57)

denklemleri elde edilmiş olur.

Ağırlığı dikkate alınan, üst ucu ankastre ve alt ucu mafsalı, kayıcı basit mesnetli olan hava ve sudaki çubuk için kritik burkulma kuvveti, (57) nolu denklemin kökleri yardımıyla

bulunacaktır. Bu denklemin çözümünde,  $\theta = \frac{\gamma_F}{\gamma_S} = 0$  olarak alınrsa hava ortamındaki çubuğun,

$$\theta = \frac{\gamma_F}{\gamma_S} = \frac{10000}{78500} = 0,127; \beta = 1,146 \text{ olarak alınrsa da su içerisindeki çubuğun kritik}$$

burkulma kuvveti bulunmuş olur. Burada, elde edilen sonuçlar, boyutsuz kritik burkulma kuvveti ile boyutsuz çubuk uzunluğu ile ifade edilecektir. Bunun için, (41) nolu bağıntıdan, b ifadesi çekilirse,

$$\eta_u = \frac{2}{3} a^{1/2} b^{3/2} \Rightarrow b = \left(\frac{3\eta_u}{2}\right)^{2/3} a^{-1/3} = \left(\frac{3\eta_u}{2}\right)^{2/3} \sqrt[3]{\frac{EI}{p_o}} \quad (58)$$

bulunur, bu ifade (43) nolu bağıntı yardımıyla,

$$b = \frac{L}{\alpha} = \left(\frac{3\eta_u}{2}\right)^{2/3} \sqrt[3]{\frac{EI}{p_o}} \Rightarrow L \sqrt[3]{\frac{p_o}{EI}} = \alpha \left(\frac{3\eta_u}{2}\right)^{2/3} \quad (59)$$

şeklinde ifade edilir. Bu bağıntıda yer alan,

$$\bar{L} = \alpha \left(\frac{3\eta_u}{2}\right)^{2/3} \quad (60)$$

ifadesi, boyutsuz kritik çubuk uzunluğu olarak isimlendirilmektedir. Ayrıca,

$$P = p_o b \quad (61)$$

bağıntısı, (59) nolu denklem yardımıyla aşağıdaki şekilde ifade edilebilir:

$$P = p_o \left(\frac{3}{2}\eta_u\right)^{2/3} \sqrt[3]{\frac{EI}{p_o}} = \left(\frac{3}{2}\eta_u\right)^{2/3} \sqrt[3]{EI(p_o)^2} \quad (62)$$

Bu bağıntıda yer alan,

$$\bar{P} = \left(\frac{3}{2}\eta_u\right)^{2/3} \quad (63)$$

ifadesi ise boyutsuz kritik burkulma kuvveti olarak isimlendirilir. Çizelge 2’de (57) nolu denklemin, hava ve su ortamında ağırlığı dikkate alınan bir çubuk için elde edilen kökleri, (60) ve (63) nolu denklemlerden elde edilen boyutsuz kritik burkulma kuvveti ile boyutsuz çubuk uzunluğu görülmektedir. Çizelge 2 incelendiği zaman, ağırlığı dikkate alınan, hava ortamındaki bir çubuğun boyutsuz kritik burkulma kuvvetinin, Özdamar [8]’m bulmuş olduğu sonuç ile örtüştüğü görülür.

#### 4. SONUÇ VE DEĞERLENDİRME

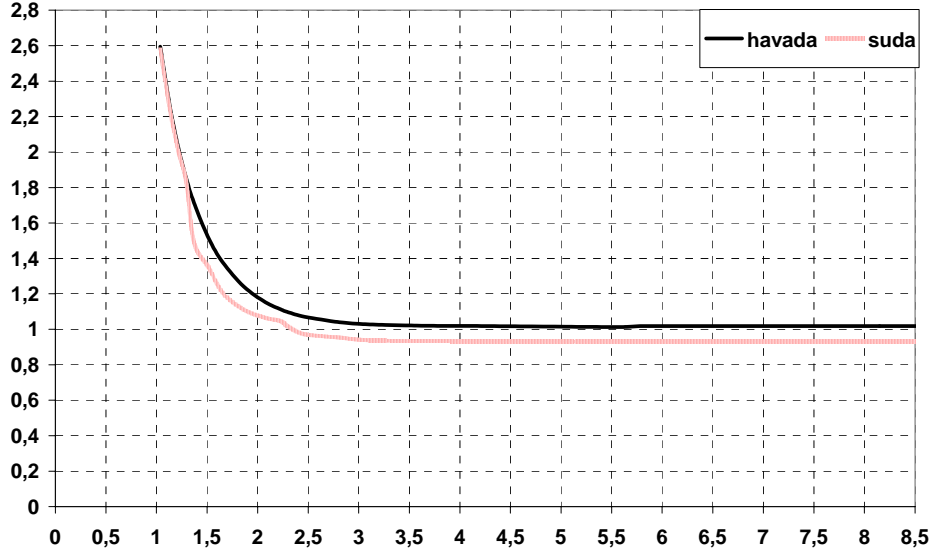
Bu çalışmada, bugüne kadar kritik burkulma kuvvetleri hesaplanmamış, üst ucu ankastre ve alt ucu mafsalı, kayıcı basit mesnetli olan sudaki çubuk için çözüm verilmiştir. Şekil 6’ da incelenen mesnetleme durumunun havada ve suda iken boyutsuz çubuk uzunluğu ve boyutsuz kritik

burkulma kuvvetleri arasındaki ilişki görülmektedir. Bu şekil incelendiğinde, küçük çubuk uzunlukları için, hem hava hem de su içerisinde yer alan çubukta, boyutsuz kritik burkulma kuvvetinin oldukça birbirine yakın olduğu görülmektedir. Ayrıca, boyutsuz çubuk uzunluğu arttıkça, ağırlığı dikkate alınan havadaki çubuğun sudaki çubuğa nazaran daha büyük bir boyutsuz kritik burkulma kuvvetine sahip olduğu görülmüştür.

**Çizelge 2.** Ağırlığı dikkate alınan bir çubuğun hava ve su ortamındaki çözümü

$\alpha$	HAVADA			SUDA		
	$\eta_U$	$\bar{P} = \left(\frac{3}{2}\eta_U\right)^{\frac{2}{3}}$	$\bar{L} = \alpha\left(\frac{3\eta_U}{2}\right)^{\frac{2}{3}}$	$\eta_U$	$\bar{P} = \left(\frac{3}{2}\eta_U\right)^{\frac{2}{3}}$	$\bar{L} = \alpha\left(\frac{3\eta_U}{2}\right)^{\frac{2}{3}}$
0,4	2,7865	2,594778	1,037911	2,7615	2,579235	1,031694
0,5	2,2678	2,261851	1,130926	2,2425	2,244997	1,122499
0,6	1,9229	2,026276	1,215766	1,8968	2,007899	1,204739
0,7	1,6778	1,85021	1,295147	1,6507	1,830233	1,281163
0,8	1,4953	1,713483	1,370786	1,2122	1,48974	1,191792
1	1,2430	1,514868	1,514868	1,0453	1,349651	1,349651
1,2	1,0790	1,378505	1,654206	0,8832	1,20624	1,447487
1,5	0,9221	1,241439	1,862159	0,7810	1,111264	1,666895
1,8	0,8260	1,15358	2,076443	0,7331	1,065376	1,917677
2	0,7828	1,113037	2,226074	0,7137	1,046497	2,092994
2,1	0,7658	1,096826	2,303335	0,6816	1,014878	2,131244
2,3	0,7391	1,071181	2,463717	0,6396	0,972747	2,237318
2,7	0,7071	1,040074	2,808201	0,6212	0,954	2,575801
3	0,6955	1,028629	3,085888	0,6056	0,937961	2,813883
3,5	0,6878	1,021023	3,573581	0,6017	0,93393	3,268754
3,8	0,6864	1,019637	3,874622	0,6017	0,933909	3,548854
4	0,6859	1,019142	4,076568	0,6002	0,932408	3,729632
5,5	0,6805	1,013786	5,575823	0,5982	0,930304	5,116675
6	0,6855	1,018746	5,805414	0,5981	0,930201	5,581205
6,5	0,6855	1,018746	6,621847	0,5981	0,930201	6,046305
7	0,6855	1,018746	7,13122	0,5981	0,930201	6,511406
7,5	0,6855	1,018746	7,640593	0,5981	0,930201	6,976506
8	0,6855	1,018746	8,149966	0,5981	0,930201	7,441606
8,5	0,6855	1,018746	8,659339	0,5981	0,930201	7,906707

Ayrıca Şekil 6 da, ağırlığı dikkate alınan havadaki çubuğun boyutsuz kritik burkulma kuvvetinin belli bir değere yaklaştığı görülmektedir. Yani boyutsuz çubuk uzunluğu ne kadar büyük olursa olsun, çubuğun artık aynı kritik burkulma kuvvetinde olduğu görülür. Nitekim bu sonucu Özdamar [8] çalışmasında, bu mesnetleme durumunun asimptotik çözümünü yaparak, asimptotik değerini, yani boyutsuz kritik burkulma kuvvetini 1,0188 olarak bulmuştur. Bu çalışmada da aynı mesnetleme durumu için, su içerisinde ağırlığı dikkate alınan çubuğun asimptotik değerinin 0,930201 olduğu bulunmuştur.



Şekil 6. Ağırlığı dikkate alınan havadaki ve sudaki çubuğun boyutsuz kritik burkulma kuvveti ile kritik burkulma uzunluğu arasındaki ilişki

#### Teşekkür

Her zaman her konuda özverili yardımlarını esirgemeyen sayın hocam Prof. Dr. Aydoğan ÖZDAMAR'a teşekkürü bir borç bilirim.

#### KAYNAKLAR

- [1] Sugiyama, Y., Ashida, K., et. al. "Buckling of Long Columns under their own weight", Bulletin of the JSME., 158-5, 1228-1235, 1978.
- [2] Euler, L., "De Curvis Elasticis", Lausanne und Genf, 1744.
- [3] Willers, F.A., "Das Knicken schwerer Gestänge", Z. Angew Math. Mech., 21, 43-51, 1941.
- [4] Wang, C.Y.; "Buckling and Postbuckling of a long-hanging elastic column due to a bottom load", Journal of Applied Mechanics., 50, 311-314, 1984.
- [5] Plunkett, R., "Static bending stresses in catenaries and drill strings", J. Eng. Ind., Trans. ASME, 89(1), 31-36, 1967.
- [6] Sugiyama, Y., Ashida, K., "Buckling of load columns under their own weight", Trans. Jpn. Soc. Mech. Eng., 21(158), 1228-1235, 1978.
- [7] Bernitsas, M.M., Kokkinis, T., "Asymptotic Behavior of Heavy Column and Rise stability boundaries", Trans. ASME, 51, 560-565, 1984.
- [8] Özdamar A., "Das Knicken schwerer Gestänge", Yayınlanmış Doktora Tezi, VWF Verlag für Wissenschaft und Forschung, Berlin, 1996.
- [9] Watson G.N. (1966) "A Treatise on the theory of Bessel functions", Cambridge University Press, Second Edition, 1966.