

**Araştırma Makalesi / Research Article**  
**ON A BOUNDARY VALUE PROBLEM WITH MATRIX COEFFICIENT**  
**WHICH HAS SPECTRAL PARAMETER IN BOUNDARY CONDITION**

**Fatma AYDIN AKGÜN\***, **Mehmet BAYRAMOĞLU**

*Yıldız Teknik Üniversitesi, Kimya-Metalurji Fakültesi, Matematik Mühendisliği Bölümü, Esenler-İSTANBUL*

**Geliş/Received: 11.03.2008 Kabul/Accepted: 11.08.2008**

---

**ABSTRACT**

In this paper following boundary value problem is considered.

$$\begin{aligned} -y'' + Q(x)y &= \lambda R(x)y, \quad a < x < b \\ y'(x) &= 0 \\ \beta_1 y(b) - \beta_2 y'(b) &= \lambda \alpha y(b) \end{aligned}$$

Here  $Q(x), R(x)$  is  $n \times n$  self-adjoint matrix functions,  $R(x)$  is positive matrix,  $\alpha, \beta_1, \beta_2$  are constants satisfy some conditions and  $\lambda$  is a spectral parameter. The spectrum of considered boundary value problem is investigated and the expansion formulas according to eigenvalues are obtained.

**Keywords:** Self-adjoint operator, spectral parameter, eigenvalue, eigenfunction.

**SINIR KOŞULUNDA SPEKTRAL PARAMETRE BULUNAN MATRİS KATSAYILI SINIR DEĞER PROBLEMİ ÜZERİNE**

**ÖZET**

Bu çalışmada aşağıdaki sınır değer problemi ele alınmıştır.

$$\begin{aligned} -y'' + Q(x)y &= \lambda R(x)y, \quad a < x < b \\ y'(x) &= 0 \\ \beta_1 y(b) - \beta_2 y'(b) &= \lambda \alpha y(b) \end{aligned}$$

Burada  $Q(x), R(x)$   $n \times n$  boyutlu kendine eş matrisler,  $R(x)$  pozitif matris  $\alpha, \beta_1, \beta_2$  bazı koşulları sağlayan sabit sayılar,  $\lambda$  spektral parametredir. Ele alınan sınır değer probleminin spektrumu incelenmiş, özfonksiyonlara göre açılım formülleri elde edilmiştir.

**Anahtar Sözcükler:** Kendine-eş operatör, spektral parametre, özdeğer, özfonksiyon.

---

\*Sorumlu Yazar/Corresponding Author: e-mail/e-ileti: fakgun@yildiz.edu.tr, tel: (212) 383 46 16

## 1. GİRİŞ

Fizikte sınır koşulunda spektral parametre bulunan diferansiyel denklemler için sınır değer problemlerine sık sık rastlanır[3].

Poisson bir mekanik problemini sınır koşulunda spektral parametre bulunan

$$-y'' = \lambda y, \quad a < x < b$$

$$y(0) = 0, \quad y'(b) = \lambda y(b)$$

şeklinde sınır değer probleminin incelenmesine indirgemıştır. Bu çalışmadan günümüze kadar sınır koşulunda spektral parametre bulunan birçok sınır değer problemi incelenmiştir. Bu çalışmalara örnek olarak sırasıyla [1],[7], [8],[9],[10],[18],[20],[22] çalışmaları gösterilebilir.

Katsayıları  $n \times n$  boyutlu matrisler olmak üzere göz önüne alınan bu çalışma, ek koşullarla, [7] çalışmasının devamıdır.

Bu çalışmada

$$l(y) = -y'' + Q(x)y = \lambda R(x)y, \quad a < x < b \quad (1.1)$$

$$y'(a) = 0 \quad (1.2)$$

$$U_\alpha(y) = \alpha y(b)$$

$$U_\beta(y) = \beta_1 y(b) - \beta_2 y'(b)$$

olmak üzere

$$-U_\beta(y) = \lambda(U_\alpha)y \quad (1.3)$$

sınır değer probleminin spektrumu ve özfonksiyonlara göre açılım formülleri incelenecektir. Burada

$$Q(x) = \begin{pmatrix} q_{11}(x) & \cdot & \cdot & q_{1n}(x) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ q_{n1}(x) & \cdot & \cdot & q_{nn}(x) \end{pmatrix}, R(x) = \begin{pmatrix} r_{11}(x) & \cdot & \cdot & r_{1n}(x) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ r_{n1}(x) & \cdot & \cdot & r_{nn}(x) \end{pmatrix}$$

elemanları reel değerli sürekli fonksiyon olan kendine-eş  $n \times n$  boyutlu matrisler,  $R(x)$  pozitif matris ve  $\alpha, \beta_1, \beta_2$  ise  $\alpha\beta_1 < 0$  ve  $\alpha\beta_2 = 1$  koşullarını sağlayan reel sayılardır.  $\lambda$

kompleks parametredir.  $y(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ \cdot \\ \cdot \\ y_n(x) \end{pmatrix} \in L_2[a, b]$  elemanları  $[a, b]$  de tanımlı kompleks

değerli fonksiyon olan  $n$  bileşenli vektör fonksiyonudur.  $Q(x)$ 'in sürekliliği basitlik için kabul

edilmiştir. Genelde  $Q(x)$ 'in elemanlarının ölçülebilirliği ve  $\int_a^b \|Q(x)\| dx < \infty$  olması yeterlidir.

$L_{2,R}[a, b]$  ile her bileşeni ölçülebilir, kompleks değerli ve

$$\int_a^b (R(x)y(x), y(x)) dx < \infty$$

koşulunu sağlayan  $y(x) = (y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x))$  vektörlerinin kümesini gösterilmektedir.

Bu kümede iki vektörün toplamı

$$y(x) + z(x) = (y_1(x) + z_1(x), y_2(x) + z_2(x), \dots, y_n(x) + z_n(x))$$

ile bir vektörün skalerle çarpımı

$$cy(x) = (cy_1(x), cy_2(x), \dots, cy_n(x))$$

şeklinde tanımlanırsa  $L_{2,R}[a, b]$  kümesi lineer uzay oluşturur.

Eğer iki vektörün iç çarpımı

$$(y, z) = \int_a^b (R(x)y(x), z(x)) dx$$

şeklinde tanımlanırsa  $L_{2,R}[a, b]$  uzayı aşağıdaki norma göre tam iç-çarpım uzayı yani Hilbert uzayı oluşturur.

$$\|y\| = \sqrt{\int_a^b (R(x)y(x), y(x)) dx}$$

Tanımlanan iç-çarpım ve normla oluşturulan Hilbert uzayı da  $L_{2,R}[a, b]$  sembolüyle gösterilecektir.  $n = 1$  iken,  $(a, b)$  de tanımlı fonksiyonlar için,  $L_{2,R}[a, b]$  bilinen Hilbert uzayıdır.

Öncelikle (1.1) ifadesiyle oluşturulan maksimal ve minimal operatörlerin tanımları verilecektir.

$D_1, (a, b)$  açık aralığının her kapalı alt aralığında kendisi türevinin her bileşeni mutlak sürekli olan  $y(x)$  vektör fonksiyonlarının kümesi olsun. Kolayca görülür ki  $R^{-1}(x)l(y), D_1$  e ait her  $y(x)$  vektör fonksiyonu için tanımlıdır.  $D_1, L_{2,R}[a, b]$  de her yerde yoğun olan bir lineer manifolddur.  $y(x)$  elemanlarının (vektör fonksiyonlarının) kümesi

$$y(x) \in D_1 \cap L_{2,R}[a, b] \text{ ve } l(y) \in L_{2,R}[a, b] \text{ iken}$$

$D$  ile gösterilsin. Tanım kümesi  $D$  olan  $L$  operatörü  $\forall y(x) \in D$  ve iken

$$Ly = R^{-1}(x)l(y)$$

şeklinde tanımlansın.

$L : L_{2,R}[a, b] \rightarrow L_{2,R}[a, b]$  operatörüne  $L_{2,R}[a, b]$  de  $R^{-1}(x)l(y)$  ile oluşturulan **maksimal operatör** denir [12]. Açıktr ki  $L$  bir lineer operatördür.

$(a, b)$  aralığında sonlu desteye sahip ve  $D$  'ye ait fonksiyonların kümesi  $D_0'$  ile gösterilsin.  $D_0', L_{2,R}[a, b]$  de hemen her yerde yoğundur[12]. Tanım kümesi  $D_0'$  olan  $L_0'$  operatörü her  $y \in D_0'$  için aşağıdaki şekilde tanımlansın.

$$L_0'y = R^{-1}(x)l(y) ,$$

Kolayca görülür ki  $L_0'$  bir simetrik operatördür.  $L_0'$  'in kapanışı  $L_0$  ile gösterilirse  $L_0$  operatörü  $L_{2,R}[a, b]$  de  $R^{-1}(x)l(y)$  ile oluşturulan **minimal (kapalı) operatördür**.

$y(x) \in D(L)$  için  $y(a), y'(a), y(b), y'(b)$  vardır ve  $L_0'$  'in tanım kümesi şu şekildedir:

$$D(L_0) = \{y(x) \in D(L) : y(a) = y'(a) = y(b) = y'(b) = 0\}$$

$L_0^* = L$  olduğu ve  $L_0'$  'in defekt indisinin  $(2n, 2n)$  olduğu bilinmektedir[12].

$L_{2,R}[a, b]$  de  $T$  operatörü aşağıdaki şekilde tanımlanabilir:

$$D(T) = \{y(x) \in L_{2,R}[a, b], y(x) \text{ ve } y'(x), [a, b] \text{ 'de mutlak sürekli } R(x)^{-1}l(y) \in L_{2,R}[a, b] \\ y'(a) = 0, U_\alpha(y) = 0\} \text{ ve } \forall y(x) \in D(T) \text{ için } Ty = R^{-1}(x)l(y) \text{ olsun.}$$

Böyle tanımlanmış  $T : L_{2,R}[a, b] \rightarrow L_{2,R}[a, b]$  operatörü kendine eş operatördür[12]. Tanımlanan  $T$  operatörü daha sonra kullanılacaktır.

(1.1),(1.2),(1.3) probleminde görüldüğü gibi  $\lambda$  özdeğeri (kompleks spektral parametre) (1.3) koşulunda bulunmaktadır. Buna göre lineer operatörler teorisinin yöntemleri doğrudan uygulanamamaktadır. Fakat (1.1)-(1.3) problemi daha geniş uzayda göz önüne alınırsa, problem olağan sınır değer problemine indirgenebilir.

## 2. (1.1)-(1.3) PROBLEMİNİN ÖZDEĞER VE ÖZFONKSİYONLARI

(1.1)-(1.3) probleminin özfonksiyonu denildiğinde ;  $[a, b]$  aralığında birinci türevi ve  $y'(x)$  fonksiyonu mutlak sürekli , (1.1) denklemini ve (1.2)-(1.3) koşullarını sağlayan, özdeş olarak sıfır olmayan  $\forall y(x)$  fonksiyonu anlaşılır ve burada  $\lambda$  sayısı da  $y(x)$  fonksiyonuna karşılık gelen özdeğerdir.

$\lambda_1, \lambda_2$  ,(1.1)-(1.3) probleminin kompleks özdeğerleri (kompleks),  $y_1(x), y_2(x)$  ise sırasıyla bu özdeğerlere karşılık gelen özfonksiyonlar (kompleks) olsun.

$$-y_1'' + Q(x)y_1 = \lambda_1 R(x)y_1, \quad a < x < b \quad (2.1)$$

$$-U_\beta(y_1) = \lambda_1 U_\alpha(y_1) \quad (2.2)$$

$$y_1'(a) = 0 \quad (2.3)$$

$$-y_2'' + Q(x)y_2 = \lambda_2 R(x)y_2, \quad a < x < b \quad (2.4)$$

$$-U_\beta(y_2) = \lambda_2 U_\alpha(y_2) \quad (2.5)$$

$$y_2'(a) = 0 \quad (2.6)$$

(2.1) in her iki yanını sağdan  $\overline{y_2}$  ile ,(2.4)' ün ise her iki yanını soldan  $\overline{y_1}$  ile skaler çarpılırsa ( $C^n$  uzayı anlamında)

$$\begin{aligned} -\left(y_1'', \overline{y_2}\right) + \left(Q(x)y_1, \overline{y_2}\right) &= \lambda_1 \left(R(x)y_1, \overline{y_2}\right) \\ -\left(y_2'', \overline{y_1}\right) + \left(Q(x)y_2, \overline{y_1}\right) &= \lambda_2 \left(R(x)y_2, \overline{y_1}\right) \end{aligned}$$

elde edilir. Bu iki ifade bir birinden çıkarılıp eşitliğin her iki yanının integrali alınırsa ( $R(x)$  kendine eş matris olduğundan);

$$-\left(y_1', \overline{y_2}\right)_a^b + \left(y_2', \overline{y_1}\right)_a^b = \int_a^b (\lambda_1 - \lambda_2) \left(R(x)y_1, \overline{y_2}\right) dx \quad (2.7)$$

olur.(1.2) koşulundan dolayı  $y_1'(a) = 0$  ve  $y_2'(a) = 0$  dır dolayısıyla (2.7)'den

$$-\left(y_1'(b), \overline{y_2}(b)\right) + \left(y_2'(b), \overline{y_1}(b)\right) = \int_a^b (\lambda_1 - \lambda_2) \left(R(x)y_1, \overline{y_2}\right) dx \quad \text{bulunur.}$$

(1.3) sınır koşulundan;

$$y(b) = \frac{U_\alpha(y)}{\alpha} \quad \text{iken} \quad U_\beta(y) = \beta_1 \frac{U_\alpha(y)}{\alpha} - \beta_2 y'(b) \quad (2.8)$$

bulunur. Buradan (2.8)'in her iki yanını  $\alpha$  ile çarpılırsa ;

$$\alpha U_\beta(y) = \beta_1 U_\alpha(y) - \alpha \beta_2 y'(b) \quad \text{olur. Böylece;}$$

$$y'(b) = \beta_1 U_\alpha(y) - \alpha U_\beta(y) \quad (2.9)$$

bulunur. (2.8) ve (2.9) da bulunan ifadeler (2.7) de kullanılırsa

$$\begin{aligned}
 & - \left[ \left( (\beta_1 U_\alpha(y_1) - \alpha U_\beta(y_1)) \frac{U_\alpha(\bar{y}_2)}{\alpha} \right) - \left( (\beta_1 U_\alpha(y_2) - \alpha U_\beta(y_2)) \frac{U_\alpha(\bar{y}_1)}{\alpha} \right) \right] \\
 & = \int_a^b (\lambda_1 - \lambda_2) (R(x) y_1, \bar{y}_2) dx, \\
 & - \left[ \frac{\beta_1}{\alpha} (U_\alpha(y_1), U_\alpha(\bar{y}_2)) - (U_\beta(y_1), U_\alpha(\bar{y}_2)) - \frac{\beta_1}{\alpha} (U_\alpha(y_2), U_\alpha(\bar{y}_1)) + (U_\beta(y_2), U_\alpha(\bar{y}_1)) \right] \\
 & = (U_\beta(y_1), U_\alpha(\bar{y}_2)) - (U_\beta(y_2), U_\alpha(\bar{y}_1)) \\
 & = -\lambda_1 (U_\alpha(y_1), U_\alpha(\bar{y}_2)) + \lambda_2 (U_\alpha(y_2), U_\alpha(\bar{y}_1)) = \int_a^b (\lambda_1 - \lambda_2) (R(x) y_1, \bar{y}_2) dx
 \end{aligned}$$

bulunur. Buradan

$$(\lambda_1 - \lambda_2) \left[ \int_a^b (R(x) y_1, \bar{y}_2) dx + (U_\alpha(y_1), U_\alpha(\bar{y}_2)) \right] = 0 \quad (2.10)$$

elde edilir. (1.1) denkleminin katsayıları, elemanları reel değerli sürekli fonksiyon olan matrisler olduğundan  $\bar{y}_1(x)$  fonksiyonuda  $\bar{\lambda}_1$  özdeğerine karşılık gelen özvektör olacaktır.

Buna göre (2.9)da  $y_2$  yerine  $\bar{y}_1(x)$  konulursa

$$(\lambda_1 - \bar{\lambda}_1) \left[ \int_a^b (R(x) y_1, \bar{y}_1) dx + |U_\alpha(y_1)|^2 \right] = 0$$

olur. Buradan  $y_1(x) \neq 0$ ,  $R(x)$  pozitif matris olduğundan

$$im \lambda_1 = 0 \quad (2.11)$$

bulunur. Dolayısıyla  $\lambda$  özdeğeri reeldir. Böylece  $\lambda_1$  keyfi özdeğer olduğundan (1.1)-(1.3) sınır değer probleminin özdeğerlerinin reel sayılardan oluştuğu sonucuna varılır. Yine ele alınan problemin katsayıları ve özdeğerleri reel olduğundan dolayı özfonksiyonları da reel değerli alınabilir. Buna göre bundan sonra (1.1)-(1.3) problemin özfonksiyonlarının  $\mathfrak{R}^n$  değerli oldukları varsayılacaktır.

### 3. (1.1)-(1.3) PROBLEMİN UYGUN BİR HİLBERT UZAYINDA BİR KENDİNE-EŞ OPERATÖRE İNDİRGEYEREK SPEKTRAL ÖZELLİKLERİNİN İNCELENMESİ

Önce  $[a, b]$  aralığında aşağıdaki şekilde bir “ $\mu$  ölçümü” tanımlanır;

$$\mu(m) = \begin{cases} \int_m R(x) dx & m \subset [a, b) \\ 1 & m = \{b\} \end{cases}, \text{burada } 1 \text{ } n \times n \text{ boyutlu matrisdir.} \quad (3.1)$$

$\mu$ 'nün tanımından görüldüğü gibi  $m \subset [a, b]$  kümesinin ölçümü  $m$ 'nin Lebesgue ölçümüne eşittir.  $L_{2,R}([a, b], \mu)$  ile  $[a, b]$  de tanımlı  $\mu$  ölçülebilir ve

$$\int_a^b \|f(x)\|^2 d\mu < \infty,$$

koşulunu sağlayan her  $x \in [a, b]$  için  $C^n$  değerli fonksiyonlar kümesi gösterilsin.

Burada iç çarpım

$$\begin{aligned} (f, g) &= \int_a^b (R(x)f(x), g(x))dx + (f(b), g(b)) \\ &= \int_a^b \left( \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (r_{ij}(x) f_j(x) \overline{g_i(x)}) \right) dx + (f(b), g(b)) \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanmıştır. Bu şekilde tanımlanan iç çarpım " $\mu$  ölçümüne" göre tanımlanmış iç çarpım olarak adlandırılacaktır. Bu küme de vektörlerin toplamı ve sayı ile çarpımı işlemlerine göre, bir lineer uzaydır.  $L_{2,R}([a, b], \mu)$  ayrılabilir bir Hilbert uzayı oluşturur[12].

Uyarı:  $\mu$  ölçümünün tanımından görüldüğü gibi  $u, v \in C^n$  iken  $L_{2,R}([a, b], \mu)$  uzayı

$$L_{2,R}[a, b] \oplus C^n$$

uzayı ile çakışır.

Burada  $L_{2,R}[a, b]$  daha önce tanımlanan ve  $n$  bileşenli fonksiyonlardan oluşan uzay,  $C^n$  ise  $n$  boyutlu kompleks vektör uzayıdır. Bir başka deyişle  $\forall f(x) \in L_{2,R}([a, b], \mu)$  vektörü

$$f(x) = \{f(x), U_\alpha(f)\} = \left\{ \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ \vdots \\ f_n(x) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} f_1(b) \\ f_2(b) \\ \vdots \\ f_n(b) \end{pmatrix} \right\} \text{ şeklinde yazılabilir.}$$

Sağ taraftaki  $f(x) [a, b]$  aralığının hemen her noktasında (Lebesgue ölçümüne göre) tanımlıdır.  $L_{2,R}([a, b], \mu)$  uzayı  $H$  harfi ile gösterilsin.(1.1)-(1.3) sınır değer problemini olağan operatör denkleme indirgemek için aşağıdaki şekilde bir  $A$  operatörü tanımlanabilir;

$$D(A) = \{y(x) \in H, y(x) \text{ ve } y'(x), (a, b) \text{ açık aralığında mutlak sürekli ve } y'(a) = 0, \alpha y(b) = U_\alpha(y)\} \text{ ve } y(x) \in D(A) \text{ iken}$$

$$A \begin{pmatrix} y(x) \\ \alpha y(b) \end{pmatrix} = \begin{cases} R^{-1}(x)l(y) & x \in [a, b] \\ -U_{\beta}(y) & x = \{b\} \end{cases} \quad (3.2)$$

olsun.

$A$  operatörünün tanımından görüldüğü gibi (1.1)-(1.3) sınır değer probleminin özdeğer ve özvektörleri  $A$ 'nın özdeğer ve özvektörleridir. Böylece (1.1)-(1.3) probleminin incelenmesi  $A : H \rightarrow H$  operatörünün spektral özelliklerinin incelenmesine indirgenmiş olur. Bu nedenle (1.1)-(1.3) problemi yerine  $A$  operatörü incelenecektir.  $A$  simetrik, alttan sınırlı, üstten sınırsız ve esaslı(essential) kendine eş operatördür.

**A Simetrik Operatördür;**

$$Af = \begin{pmatrix} R^{-1}(x)(-f'' + Q(x)f) \\ -U_{\beta}(f) \end{pmatrix}$$

Burada;

$$Q(x)f = \begin{bmatrix} q_{11}(x) & \cdot & \cdot & q_{1n}(x) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ q_{n1}(x) & \cdot & \cdot & q_{nn}(x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1(x) \\ \cdot \\ \cdot \\ f_n(x) \end{bmatrix}$$

$$\text{ve } U_{\beta}(f) = \beta_1 \begin{bmatrix} f_1(b) \\ \cdot \\ \cdot \\ f_n(b) \end{bmatrix} - \beta_2 \begin{bmatrix} f_1'(b) \\ \cdot \\ \cdot \\ f_n'(b) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_{\beta}(f_1) \\ \cdot \\ \cdot \\ U_{\beta}(f_n) \end{bmatrix} = U_{\beta}(f).$$

$$(Af, g) = \int_a^b (R(x)R^{-1}(x)(-f'' + Q(x)f), g) dx - (U_{\beta}(f), U_{\alpha}(g))$$

$$= \int_a^b (-f'', g) dx + \int_a^b (Q(x)f, g) dx - (U_{\beta}(f), U_{\alpha}(g))$$

$$((f, g)') = (f', g) + (f, g')$$

$$= (-f', g) \Big|_a^b + \int_a^b (f', g') dx + \int_a^b (Q(x)f, g) dx - (U_{\beta}(f), U_{\alpha}(g))$$

( $f'(a) = 0$  ve  $Q(x)$  kendine eş matris)



$$\begin{aligned}
 &= (-f'(b), g(b)) + \int_a^b (f', g') dx + \int_a^b (f, Q(x)g) dx - (U_\beta(f), U_\alpha(g)) \\
 &= (-f'(b), g(b)) + (f, g') \Big|_a^b - \int_a^b (f, g'') dx + \int_a^b (f, Q(x)g) dx - (U_\beta(f), U_\alpha(g))
 \end{aligned}$$

sınır koşulu (1.2) den;

$$= (-f'(b), g(b)) + (f(b), g'(b)) - \int_a^b (f, g'') dx + \int_a^b (f, Q(x)g) dx - (U_\beta(f), U_\alpha(g))$$

bulunur.(2.9) dan

$$\begin{aligned}
 &= \left( -[\beta_1 U_\alpha(f) - \alpha U_\beta(f)], \frac{U_\alpha(g)}{\alpha} \right) + \left( \frac{U_\alpha(f)}{\alpha}, [\beta_1 U_\alpha(g) - \alpha U_\beta(g)] \right) \\
 &\quad + \int_a^b (f, (-g'' + Q(x)g)) dx - (U_\beta(f), U_\alpha(g)) \\
 &= -\frac{\beta_1}{\alpha} (U_\alpha(f), U_\alpha(g)) + (U_\beta(f), U_\alpha(g)) + \frac{\beta_1}{\alpha} (U_\alpha(f), U_\alpha(g)) \\
 &\quad - (U_\alpha(f), U_\beta(g)) + \int_a^b (f(x), (-g'' + Q(x)g)) dx - (U_\beta(f), U_\alpha(g)) \\
 &= \int_a^b (f(x), Ag(x)) d\mu = (f, Ag)
 \end{aligned}$$

bulunur. Böylece  $A$  operatörünün simetrik operatör olduğu gösterilmiştir.

$\forall y \in D(A)$  için  $(Ay, y) \geq -\gamma(y, y)$  olacak şekilde sabit  $\gamma$  sayısının varlığı gösterilebilir.

$l(y)$  diferansiyel ifadesinin katsayıları ve sınır koşulundaki sayılar reel olduğundan dolayı  $A : H \rightarrow H$  operatörü reeldir[6]. Buna göre  $L$ 'nin alttan sınırlı olduğunu göstermek için ,bu operatörün  $D(L)$  ye ait olan bileşenleri reel değerli fonksiyonlar olan vektörleri için gösterilmesi yeterlidir.

**A operatörü alttan sınırlıdır;**

$$Ay = \begin{pmatrix} R^{-1}(x)(-y(x)'' + Q(x)y(x)) \\ -U_\beta(y) \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} y(x) \\ U_\alpha(y) \end{pmatrix} \text{ iken}$$

$$\begin{aligned}
 (Ay, y) &= \left( \begin{pmatrix} R^{-1}(x)(-y(x)'' + Q(x)y(x)) \\ -U_{\beta}(y) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y(x) \\ U_{\alpha}(y) \end{pmatrix} \right) \\
 &= \int_a^b (R(x)R^{-1}(x)(-y(x)'' + Q(x)y(x)), y(x)) dx - (U_{\beta}(y), U_{\alpha}(y)) \\
 &= -(y(x)', y(x)) \Big|_a^b + \int_a^b (y(x)', y(x)') dx + \int_a^b (Q(x)y(x), y(x)) dx \\
 &\quad - \left[ \beta_1 y(b) - \beta_2 y'(b) \right] \alpha_1 y(b)
 \end{aligned}$$

(1.2) koşulundan ;

$$\begin{aligned}
 &= -(y'(b), y(b)) + \int_a^b (y(x)', y(x)') dx + \int_a^b (Q(x)y(x), y(x)) dx \\
 &\quad - \alpha\beta_1 (y(b), y(b)) + \alpha\beta_2 (y'(b), y(b))
 \end{aligned}$$

olur.  $\alpha\beta_1 < 0$ ,  $\alpha\beta_2 = 1$  olduğundan dolayı yukarıdaki ifadeden

$$\begin{aligned}
 &= \int_a^b \|y(x)'\|^2 dx + \int_a^b (Q(x)y(x), y(x)) dx - \alpha\beta_1 \|y(b)\|^2 \geq \int_a^b (Q(x)y(x), y(x)) dx \\
 &\qquad\qquad\qquad \geq -\gamma \|y\|_{L^2[a,b]}^2 \geq -\gamma \|y\|_H^2
 \end{aligned}$$

bulunur. Burada  $\gamma = \max_{a < x < b} \|Q(x)\|$ . Böylece  $(Ay, y) \geq -\gamma(y, y)$  bulunmuş dolayısıyla A operatörünün alttan  $-\gamma$  sayısı ile sınırlı olduğu gösterilmiştir.

**$(A - \lambda I)D(A)$  her yerde yoğundur;**

$\lambda, A$ 'nın alt sınırı  $-\gamma$ 'dan küçük bir reel sayı olsun. Bu durumda  $(A - \lambda I)D(A)$ 'nın kapanışının  $(A - \lambda I)D(A) = H$  olduğunu gösterilebilir.

$$u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \cdot \\ u_n \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \cdot \\ v_n \end{pmatrix} \text{ olmak üzere } \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \in H \text{ sabit tutulmuş herhangi bir eleman olsun.}$$

$$\begin{pmatrix} f(x) \\ U_{\alpha}(f) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(x) \\ \alpha f(b) \end{pmatrix} \in D(A) \text{ keyfi eleman iken,}$$

$$\begin{aligned} & \left( (A - \lambda I) \begin{pmatrix} f(x) \\ \alpha f(b) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \right) = \left( \begin{pmatrix} (R^{-1}(x)T - \lambda)f \\ -(\beta_1 f(b) - \beta_2 f'(b)) - \lambda \alpha f(b) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \right) \\ & = \int_a^b (R(x)(R^{-1}(x)T - \lambda)f, u) dx + \left( \begin{pmatrix} -(\beta_1 f(b) - \beta_2 f'(b)) - \lambda \alpha f(b) \\ v \end{pmatrix}, v \right) \\ & = \int_a^b ((L - \lambda T(x))f, u) dx + \left( \begin{pmatrix} -(\beta_1 f(b) - \beta_2 f'(b) + \lambda \alpha f(b)) \\ v \end{pmatrix}, v \right) = 0 \end{aligned} \tag{3.3}$$

eşitliğinin sağlandığını varsayılırsa keyfi  $f \in D(T)$  iken (3.3) de

$$\left( \begin{pmatrix} -(\beta_1 f(b) - \beta_2 f'(b) + \lambda \alpha f(b)) \\ v \end{pmatrix}, v \right) = 0 \tag{3.4}$$

koşulu sağlandığında

$$\int_a^b ((L - \lambda T(x))f, \bar{u}) dx = 0 \tag{3.5}$$

dir.  $(L - \lambda R(x))D(T) = L_{2,R}[a, b]$  olduğundan (3.5) e göre

$$u(x) = 0$$

dir. Bu (3.3) te göz önüne alınırsa

$$\left( \begin{pmatrix} -(\beta_1 f(b) - \beta_2 f'(b) + \lambda \alpha f(b)) \\ v \end{pmatrix}, v \right) = 0$$

dir.  $\begin{pmatrix} f(x) \\ \alpha f(b) \end{pmatrix} \in D(A)$  keyfi eleman olduğundan  $\beta_1 f(b) - \beta_2 f'(b) + \lambda \alpha f(b) \neq 0$

olacak şekilde  $f(x)$  fonksiyonu vardır. Bundan dolayı (3.4) den  $v = 0$  bulunur. Buradan  $(A - \lambda I)D(A) = H$  olduğu görülür.

$\lambda < -\gamma$  iken  $(A - \lambda I)^{-1}$  simetrik operatörünün sınırlı, H da her yerde yoğun kümede tanımlı olduğunu dikkate alınırsa bilinen *Rellich Teoremine* [5] göre  $(A - \lambda I)^{-1}$  operatörünün kapanışı kendine eş operatördür. Bu ise A'nın kapanışının kendine eş olduğunu kanıtlar. Yani **A esash (essential) kendine eş operatördür.**

#### 4. ÖZ FONKSİYONLARA GÖRE AÇILIM

Önce A'nın kendine eş operatör olduğunu gösterilmelidir. Bunun için [14] çalışmasında olduğu gibi aşağıdaki şekilde  $A_1$  operatörünü tanımlanacaktır.

$$D(A_1) = \{y \in D(T) \mid y'(b-0) = 0\} \text{ iken her } \forall y \in D(A_1) \text{ için}$$

$$A_1 y = l(y)$$

ve

$L_{2,R}[a,b]$  uzayı  $H$ 'nin  $y(b) = 0$  koşulunu sağlayan elemanlarının oluşturduğu alt uzay ile özdeşleştirilebilir ve buna göre

$$L_{2,R}[a,b] = \{y \in H; y(b) = 0\}$$

olduğu varsayılacaktır.  $l(y)$  diferansiyel ifadesi ve  $y'(a) = 0$ ,  $U_\beta(y) = 0$  koşullarıyla oluşturulan

$$T : L_{2,R}[a,b] \rightarrow L_{2,R}[a,b]$$

operatörü kendine eş operatördür[14].  $T$  operatörünün spektrumu sadece aşağıdaki forma sahip özdeğerlerden oluştuğu bilinmektedir.

$$\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \dots \leq \lambda_n \leq \dots \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = \infty.$$

Bu ise  $T$ 'nin esaslı(essential) spektrumunun yani  $\sigma_e(T)$ 'nin boş küme olduğunu gösterir.

$A$  ve  $T$  operatörleri  $A_1$  operatörünün sonlu boyutlu genişlemeleridir. Yani  $D(A)$  ve  $D(T)$  kümeleri  $D(A_1)$  modülüne göre sonlu boyutludurlar. Başka bir deyişle  $M_1, M_2$  sonlu boyutlu alt uzaylar olmak üzere  $D(A)$  ve  $D(T)$  sırasıyla

$$\begin{aligned} D(A) &= D(A_1) + M_1 & D(A_1) \cap M_1 &= D(T) \cap M_2 = \phi \text{ (boş küme)} \\ D(T) &= D(A_1) + M_2 \end{aligned}$$

şeklinde gösterilebilir. Bu durumda aşağıdaki bilinen teorem ifade edilebilir.

#### **TEOREM**

Kapalı operatörün her sonlu boyutlu genişletilmesi de kapalı operatördür.

İfade edilen teoreme göre  $A$  kapalı operatördür.  $A$ 'nın kapanışının kendine eş olduğunu gösterilmişti. Böylece  $A$  esaslı(essential) kendine-eştir. Weyl Teoremine [16] göre kapalı operatörün esas spektrumu ile bu operatörün her sonlu boyutlu genişletilmesinin esas spektrumu çakışır.

Buna göre

$$\sigma_e(A) = \sigma_e(T)$$

dir.  $\sigma_e(T) = \phi$  olduğundan  $\sigma_e(A) = \phi$  olur.

Esas spektrumu boş küme olan her kendine eş operatörün spektrumu saf ayrıktır[15]. Buna göre alttan sınırlı  $A$  operatörünün spektrumu, yığılma noktası sadece artı sonsuz olan, özdeğerlerden ibarettir. Bu özdeğerleri aşağıdaki şekilde yazılabilir.

$$\mu_1 \leq \mu_2 \leq \dots \leq \dots \leq \mu_n \leq \dots \quad , \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \mu_n = \infty$$

Bu aynı zamanda  $A$ 'nın üstten sınırsız olduğunu gösterir.  $\mu_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n..$ )

$$\text{özdeğerlerine karşılık gelen } n \text{ bileşenli ortonormal özvektörleri } \forall \varphi_i(x) = \begin{pmatrix} \varphi_{i1}(x) \\ \varphi_{i2}(x) \\ \vdots \\ \varphi_{in}(x) \end{pmatrix}$$

$$\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x), \dots \quad (4.1)$$

ile gösterilir. Bilinen teoreme göre ([15],[11]) (4.1) vektörler sistemi  $H$  uzayının bir bazıdır. Bununla biz aşağıdaki teoremi ispatlamış oluruz.

**Teorem 1:**

$$f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ \vdots \\ f_n(x) \end{pmatrix} \in H \text{ keyfî bir vektör olsun. Bu takdirde}$$

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \varphi_k \quad (4.2)$$

eşitliği doğrudur. Burada

$$a_k = \int_a^b (R(x)f(x), \varphi_k(x)) dx \quad , \quad k = 1, 2, \dots$$

förmülleri ile tanımlanır. (3.2) eşitliğindeki seri  $f(x)$ ' e  $\mu(x)$  ölçümüne göre ortakuadratik anlamda yakınsar.

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_a^b \left\| f - \sum_{k=1}^N a_k \varphi_k \right\|^2 d\mu(x) = 0$$

Bilinenlere dayanarak ([2],[17],[7]) Teorem 1'in özel hali ifade edilebilir.

**Teorem 2:**

$u \in L^2[a, b]$  herhangi bir vektör,  $\tilde{\varphi}_k$  ise  $\varphi_k$ 'nin  $[a, b]$ 'ye kısıtlaması olsun. Bu takdirde

$$u = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \tilde{\varphi}_k \quad (4.3)$$

$$0 = \sum_{k=1}^{\infty} \left( \tilde{\varphi}_k(x), \sum_{i=1}^n U_{\alpha}(\tilde{\varphi}_{ki}) \right) \quad (4.4)$$

**On a Boundary Value Problem with Matrix Coefficient ...**

eşitlikleri sağlanır.(4.3) deki  $b_k$  katsayıları;

$$b_k = \int_a^b (R(x)u(x), \varphi_k(x)) dx \quad , \quad k = 1, 2, \dots$$

formülleri ile tanımlanır.(4.3) serisi  $u(x)'e$   $L_{2,R}[a, b]$  anlamında yakınsaktır. Ek olarak

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left( \sum_{i=1}^n U_{\alpha}(\tilde{\varphi}_{ki}) \right)^2 = n \quad (4.5)$$

**İspat:**

Teoremi ispatlamak için

$$u = \begin{cases} u(x) & a \leq x < b \\ U_{\alpha}(u) & x = \{b\} \end{cases} \quad \text{ve} \quad \int d\mu = \begin{cases} \int R(x) dx & a \leq x < b \\ 1 & x = \{b\} \end{cases} \quad \text{iken}$$

$\sum_{k=1}^{\infty} \tilde{\varphi}_k \int_a^b (u(x), \varphi_k(x)) d\mu(x)$  serisinin  $u(x)$ 'e  $\mu(x)$  ölçümüne göre ortakuadratik

yakınsaması, yani:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_a^b \left\| u(x) - \sum_{k=1}^N \tilde{\varphi}_k \int_a^b (u(x), \varphi_k(x)) d\mu(x) \right\|^2 d\mu(x) = 0$$

kullanılacaktır. Buradan

$$\begin{aligned} & \lim_{N \rightarrow \infty} \left\{ \int_a^b \left\| u(x) - \sum_{k=1}^N \tilde{\varphi}_k \int_a^b (u(x), \varphi_k(x)) d\mu(x) \right\|^2 d\mu(x) \right\} \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \left\{ \int_a^b \left\| u(x) - \sum_{k=1}^N \tilde{\varphi}_k \int_a^b (R(x)u(x), \varphi_k(x)) dx + \sum_{k=1}^N \tilde{\varphi}_k (U_{\alpha}(u), U_{\alpha}(\varphi_k)) \right\|^2 dx + \right. \\ & \left. \left\| U_{\alpha}(u) - \sum_{k=1}^N U_{\alpha}(\tilde{\varphi}_k) \int_a^b (u(x), \varphi_k(x)) d\mu(x) \right\|^2 \right\} = 0 \end{aligned} \quad (4.6)$$

olur.  $u = \begin{pmatrix} u(x) \\ 0 \end{pmatrix}$  alınrsa  $U_{\alpha}(u) = 0$  olur. Bu durumda (4.6) eşitliğinden

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left\{ \int_a^b \left\| u(x) - \sum_{k=1}^N \tilde{\varphi}_k \int_a^b (R(x)u(x), \varphi_k(x)) dx \right\|^2 dx + \left\| \sum_{k=1}^N U_{\alpha}(\tilde{\varphi}_k) \int_a^b (u(x), \varphi_k(x)) d\mu(x) \right\|^2 \right\} = 0$$

elde edilir. Böylece

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left\| u(x) - \sum_{k=1}^N \tilde{\varphi}_k \int_a^b (R(x)u(x), \varphi_k(x)) dx \right\|^2 = 0 \quad \rightarrow$$

$$u(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{\varphi}_k \int_a^b (R(x)u(x), \varphi_k(x)) dx \text{ ve } 0 = \sum_{k=1}^{\infty} U_{\alpha}(\tilde{\varphi}_k) \int_a^b (u(x), \varphi_k(x)) dx$$

bulunmuş olur . Böylece (4.3) gösterilmiştir.

(4.6) da  $u(x) = \begin{pmatrix} u(x) \\ U_{\alpha}(u) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  alınırsa (4.6) eşitliği aşağıdaki gibidir.

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left\{ \int_a^b \left\| \sum_{k=1}^N \tilde{\varphi}_k (1, U_{\alpha}(\varphi_k)) \right\|^2 dx + \left\| 1 - \sum_{k=1}^N U_{\alpha}(\tilde{\varphi}_k) (1, U_{\alpha}(\varphi_k)) \right\|^2 \right\} = 0 \quad (4.7)$$

Buradan

$$\sum_{k=1}^{\infty} \tilde{\varphi}_k(x) (1, U_{\alpha}(\varphi_k)) = 0 \text{ veya } \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{\varphi}_k(x) \left( \sum_{i=1}^n U_{\alpha}(\varphi_{ki}) \right) = 0 \quad (\text{yani (4.4) eşitliği})$$

ve

$$\sum_{k=1}^{\infty} U_{\alpha}(\tilde{\varphi}_k) (1, U_{\alpha}(\varphi_k)) = 1 \quad (\text{yani (4.5) eşitliği})$$

bulunur. (Burada 1:n boyutlu birim vektördür)

$$\text{Özel olarak 1 birim vektörünü } 1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \cdot \\ 0 \end{pmatrix} \text{ şeklinde alınırsa bu durumda}$$

(4.4) eşitliği

$$\sum_{k=1}^{\infty} \tilde{\varphi}_k (U_{\alpha}(\varphi_{k1})) = 0$$

ve (4.5) eşitliği

$$\sum_{k=1}^{\infty} U_{\alpha}(\tilde{\varphi}_{k1}) \left( \sum_{j=1}^n U_{\alpha}(\varphi_{kj}) \right) = n$$

şeklinde yazılabilir.

**KAYNAKLAR**

- [1] Poisson S.D., Memoire sur la Maniere d'exprimer hes Fonctions par des Series de Quantites Periodiques, estur l'usage de cette , Transformation dans La Resolution de Differens Problems, Journal de l'Ecole Polytechnique, Cah. 18(1820), pp.417-489.
- [2] Friedman B., Principles and Techniques of Applied Mathematics, John Wiley & Sons, London, 1956.
- [3] Tychonov A.N. and Samarskii I. I., Equations of Mathematical Physics, New York, 1956.
- [4] Glazman I.M., Direct Methods of Qualitative Spectrum Analysis of Singular Differential Operators, Israel Program for Scientific Translations, Jerusalem, 1965
- [5] Hellwig G., Differential Operators of Mathematical Physics, London, 1967.
- [6] Naimark M.A., Linear Differential Operators , George G. Harrap & Company, LTD, London, 1968.
- [7] Walter J., Regular Eigenvalue Problems with Eigenvalue Parameter in the Boundary Condition, Math.Z. 133, Page: 301-312, 1973.
- [8] Russakovskii E.M., Operator Treatment of Boundary Value Problems with Spectral Parameters Entering via Polynomials in the Boundary Conditions, Functional Analysis Applications 9 (1975), 358-359.
- [9] Fulton C.T., Two-Point Boundary Value Problems with Eigenparameter Contained in the Boundary Conditions, Proc. R. Soc. Edinburg A77 (1977), 293-308.
- [10] Fulton C.T., Singular Eigenvalue Problems with Eigenvalue-parameter Contained in the Boundary Conditions, Proc. R. Soc. Edinburg A87 (1980), 1-34.
- [11] Kato T., Perturbation Theory for Linear Operators, Springer Verlag, Berlin, New-York, 1980.
- [12] Weidmann J., (1980), Linear Operators in Hilbert Spaces, Graduate Texts in Mathematics, Vol.68, Springer Verlag, New York.
- [13] Shkalikov A.A., Boundary Value Problems for Ordinary Differential Equations with Parameter in the Boundary Conditions, J. Soviet Math. 33 (1986) 1311-1342.
- [14] Weidmann J., (1987), Spectral Theory of Ordinary Differential Operator, Springer Verlag, London.
- [15] Akhiezer N.I., Glazman I.M., Theory of Linear Operators in Hilbert Space, Dover Publications, INC, New York, (1987).
- [16] Birman M.S. and Solonyak M.Z., Spectral Theory of Self Adjoint Operators, DRedidel Published co Drdrecht, 1987.
- [17] Hochstad H., Integral Equations, John Wiley & Sons, New York, 1989.
- [18] Binding P.A., Browne P.J., Seddighi K., Sturm-Liouville Problems with Eigenparameter Dependent Boundary Conditions, Proc. Edinburgh Math. Soc. 37 (1993), 57-72.
- [19] Russakovskii E.M., (1996), The Matrix Sturm-Liouville Problem with Spectral Parameter in the Boundary Conditions, Algebraic and Operator Aspects, Trans. Moscow. Math. Soc., 159-184.
- [20] Amara J.B., Fourth Order Spectral Problem with Eigenvalue in the Boundary Conditions, Functional Analysis and its Applications, 2004.
- [21] Binding P.A., Browne P.J and Watson B.A., Equivalence of Inverse Sturm-Liouville Problems with Boundary Conditions Rationally Dependent on the Eigenparameter, J. Math. Analysis Applic. 291(2004), 246-261.
- [22] Binding P.A., Browne P.J and Watson B.A., Sturm-Liouville Problems with Reducible Boundary Conditions, Proceedings of the Edinburg Mathematical Society, (2006) 49, 593-608.