

## DÜZ DİŞLİ ÇARKLARIN SONLU ELEMANLAR METODU İLE MODELENMESİ

**M. Cüneyt FETVACI\* , C. Erdem İMRAK**

*İstanbul Teknik Üniversitesi, Makine Fakültesi, Makine Mühendisliği Bölümü, Gümüşsuyu-İSTANBUL*

**Geliş/Received: 14.01.2004 Kabul/Accepted: 31.03.2004**

**FINITE ELEMENT MODELLING OF SPUR GEARS**

---

### ABSTRACT

The finite element method is a powerful technique used in the analysis of the engineering problems. The method gives adequate solutions to the stress concentration problems where exact analytical solutions are not available. In this study, the principles of modelling spur gears for finite element stress analysis are examined. The model developed is analyzed and the results are given comparing with other researchers.

**Keywords:** Düz dişli çark, gerilme analizi, sonlu eleman metodu

### ÖZET

Sonlu elemanlar metodu mühendislik problemlerinin analizinde kullanılan güçlü bir sayısal tekniktir. Özellikle gerilme yığılmasının söz konusu olduğu problemlerde, sonlu elemanlar metodu uygun modelleme ile tatminkar neticeler vermektedir. Bu çalışmada düz dişli çarkların sonlu elemanlar metodu ile gerilmelerinin analizinde dikkat edilmesi gereken hususlar ele alınmıştır. Modelin tesisinde yapılan kabuller ve izlenen adımlar izah edilmiştir. Tesis edilen dişli çark sonlu elemanlar modeli analiz edilmiş ve elde edilen neticeler diğer araştırmacıların neticeleri ile karşılaştırılarak verilmiştir.

**Anhtar Sözcükler:** Spur gear, stres analysis, finite element method

---

### 1. GİRİŞ

Dişli çark dizaynında dişdibi gerilmelerinin analizi temel problemdir. Dişdibi gerilmelerinin bilinmesi, dişli hasarına karşı önlem almada ve yük taşıma kapasitesinin artırılması bakımından önem arz etmektedir. Analitik metodlara alternatif olarak, Wilcox ve Coleman [1], sonlu eleman metodunu (SEM) dişdibi gerilmelerini analiz etmek için dişli çarklara uygulamışlardır. Analiz neticesinde simetrik ve simetrik olmayan diş profilleri için dişdibi gerilmeleri hesaplanmıştır. Çalışmada iki boyutlu dişli çark sonlu eleman modelini tesisinde göz önüne alınan hususlar belirtilmiştir. Chabert ve arkadaşları [2] tatminkar doğrulukta netice veren dişli çark sonlu elemanlar modelinin diş sayısı ve göbek derinliğini tayin etmişler ve kurdukları modelle gerçekleştirdikleri analizler neticesinde dişdibinde gerilmeyi hesaplayan bir ifade tesis etmişlerdir. Tobe ve arkadaşları [3], geliştirdikleri sonlu eleman modeli ile dişteki gerilmeyi ve yüklenme noktasındaki şekil değişimini incelemişlerdir. Bahsedilen çalışmalarda [1-3] tek dişten oluşan sonlu eleman modelleri kullanılmıştır.

---

\* Sorumlu Yazar/Corresponding Autor: e-mail: fetvacic@itu.edu.tr ; tel: (0212) 243 4771

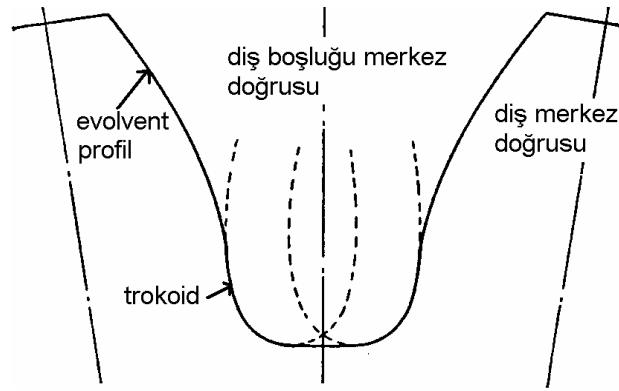
## Düz Dişli Çarkların Sonlu Elemanlar...

Dişli çark sonlu elemanlar modelini elde etmek için her şeyden önce dişli profilini tayin eden analitik ifadelerin uygun bir programlama yaklaşımı ile bilgisayar ortamına aktarılması gerekmektedir. Literatürde mevcut çalışmalarda, çeşitli metodlarla diş profilini tayin eden analitik ifadeler tesis edilmiştir [4-7].

Bu çalışmada evolvent profilli düz dişli çarkların sonlu elemanlar modellenmesinde dikkat edilmesi gereken hususlar hakkında bilgi verilmiştir. Dişdibi bölgesinde yorulma çatlağını tetikleyen gerilme yığılmasını yükleme şartlarına göre inceleyen modelin tesisi ele alınmıştır. Uygulama ANSYS genel amaçlı sonlu eleman analiz paket programında gerçekleştirilmiştir. Çalışmada geliştirilen dişli çark sonlu elemanlar modelinin analizinden elde edilen neticeler diğer araştırmacıların modelleri ile karşılaştırılarak verilmiştir.

## 2. DİŞLİ ÇARK GEOMETRİSİ

Düz dişli çark geometrisi diş yan yüzeylerinde evolvent eğrisinden ve diş yan yüzeylerini diş dibi dairesine bağlayan trokoid formda kök eğrisinden meydana gelmektedir (Şekil 1). Kesici takımın geometrisi diş profilini tayin etmektedir. Trokoidal kök eğrisini ve evolvent profili tayin eden ifadeler dişli çarkların analitik mekaniğinden elde edilmektedir [4,5].



Şekil 1. Düz dişli çark geometrisi [5]

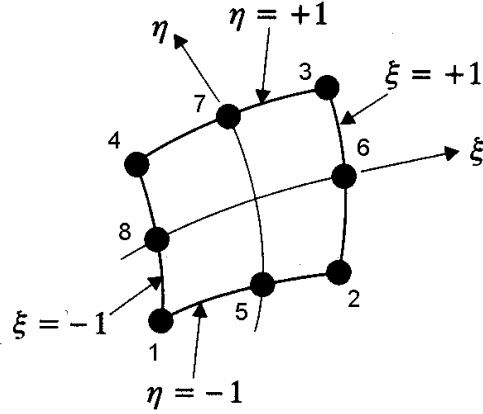
Litvin tarafından geliştirilen düz dişli çark diş profili oluşturma metodunda belirtilen ve kremayer bıçakla dişli imalatının simüle eden parametrik ifadeler, Fetvacı ve İmrak tarafından bilgisayar ortamında kullanılmak üzere düzenlenmiş haliyle bu çalışmada evolvent düz dişli profili elde etmek için kullanılmıştır [4,8]. Bu çalışmada ele alınan evolvent diş profilini elde etmek için kullanılan kremayer bıçak ve modellemede kullanılacak evolvent profili Şekil 2'de görülmektedir.

Kesici takımın geometrisi Şekil 3'de görülmektedir. Kesici takımın yan yüzeyi dişlinin evolvent profilini, takım ucunun yay kısmı dişlinin trokoid forma kök eğrisini ve nihayet takım ucunun doğru kısmı ise dişdibini dairesini belirlemektedir.



## Düz Dişli Çarkların Sonlu Elemanlar...

analizin doğruluk derecesini iyileştirir [10]. Bu çalışmada kullanılan 8-düğüm noktalı ve ikinci dereceden yerdeğiştirme fonksiyonlu sonlu eleman Şekil 4'de gösterilmiştir.



Şekil 4. 8-düğüm noktalı dörtgen sonlu eleman

Eleman şekil fonksiyonları köşe düğüm noktalarında (1,2,3 ve 4 numaralı düğümlerde),

$$N_i = \frac{1}{4}(1 + \xi\xi_i)(1 + \eta\eta_i)(\xi\xi_i + \eta\eta_i - 1) \quad (1)$$

burada  $\xi_i$  ve  $\eta_i$  ilgili düğüm noktasının doğal koordinatlarıdır. Şekil 4'de görülen 5, 6, 7 ve 8 numaralı düğümler, kenar-orta düğüm noktaları olup, eleman şekil fonksiyonları (2) ve (3) numaralı denklemlerde verilmiştir.  $\xi_i = 0$  olduğu 5 ve 7 numaralı düğüm noktalarında,

$$N_i = \frac{1}{2}(1 + \xi^2)(1 + \eta\eta_i) \quad (2)$$

$\eta_i = 0$  olduğu 6 ve 8 numaralı düğüm noktalarında,

$$N_i = \frac{1}{2}(1 + \xi\xi_i)(1 + \eta^2) \quad (3)$$

Eleman içindeki herhangi bir P noktasının yerdeğiştirme bileşenleri ( $u$ ,  $v$ ), şekil fonksiyonları  $N_i$  ve düğüm noktası yerdeğiştirmeleri ( $u_i$ ,  $v_i$ ) cinsinden,

$$u = \sum_{i=1}^8 N_i u_i = NU \quad \text{ve} \quad v = \sum_{i=1}^8 N_i v_i = NV \quad (4)$$

denklemler ile ifade edilmektedir. Şekil değiştirme vektörü ise,

$$\varepsilon = Bq \quad (5)$$

olarak yazılabilir. Bu denklemde yerdeğiştirmeleri şekil değıştirmelere bağlayan  $B(3 \times 16)$  matrisi, doğal koordinatlar  $\xi$  ve  $\eta$  değışkenleri ile düğüm noktalarının global koordinatlarını içermektedir. Elemanın düğüm noktası yerdeğiştirme vektörü

$$q = [u_1 \quad v_1 \quad \dots \quad u_8 \quad v_8] \quad (6)$$

dir. Elemanın rijitlik matrisi aşağıdaki denklemde ifade edilmektedir.

$$k^e = t^e \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 B^T DBJd\xi d\eta \quad (10)$$

#### 4. DIŞLI ÇARK SONLU ELEMAN MODELİ

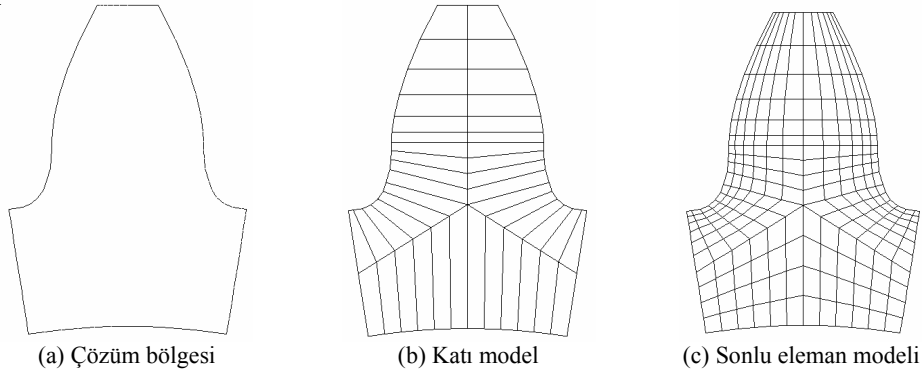
Düz dişli çarklarda, diş radyal eksene (diş merkez doğrusu) göre simetriktir. Diş formu genişlik doğrultusunda değişmediğinden ve teorik olarak diş genişliği boyunca kuvvet dağılımının düzgün olduğu kabul edilebildiğinden dişler iki boyutlu cisim olarak modellenebilir [11-13]. Dişlerin üç boyutlu olarak modellenmesi, iki boyutlu modellemedeki benzer neticeleri vermekle birlikte, model hazırlama ve çözüm süresi (hesaplama maliyeti) uzun ve zahmetli olacağından tercih edilmemektedir.

##### 4.1. Eleman Tipi ve Malzeme Özellikleri

Malzeme homojen, izotropik ve Hook Kanuna göre elastiktir. Elastisite modülü ve poisson oranı malzeme özellikleridir. Bu özelliklere göre, yukarıda matematiksel özellikleri açıklanan 2-Boyutlu izoparametrik dörtgen eleman modellemede kullanılmıştır.

##### 4.2. Sonlu Eleman Ağının Tesisi

Fetvacı, çözüm yöntemine bağlı olarak dişli çark sonlu eleman ağlarının değişik şekillerde oluşturabileceğini vurgulayarak, modelin tesis edilmesinde takip edilen adımları detaylı olarak sunmuştur [14]. Buna göre, tek bir dişli uzayda belirleyen tel kafes model, yardımcı çizgiler ile bölgelere ayrılır. Bu bölgelere katı model özelliği verildikten ve eleman tipi ile malzeme özellikleri belirlendikten sonra uygun eleman dağılımı tayin edilerek sonlu eleman modeli elde edilmektedir. Tek bir dişden oluşan çözüm bölgesi, katı modeli ve sonlu eleman modeli Şekil 5'de gösterilmiştir.



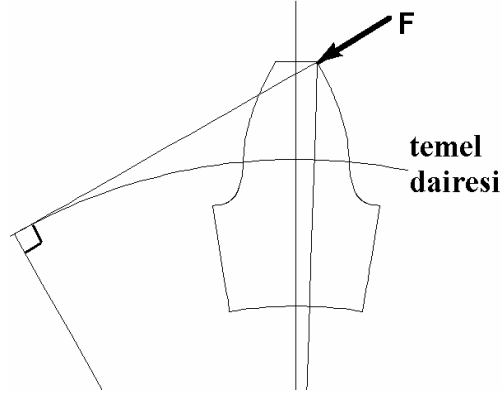
Şekil 5. Dişli çark sonlu elemanlar modelinin elde edilmesi

##### 4.3. Sınır Şartlarının Tatbik Edilmesi

Statik sınır şartı diş kuvvetidir. Kuvvetin tatbik açısı evolvent geometrisinden tayin edilmektedir. Bu açıya göre kuvvetin radyal ve teğetsel bileşenleri hesap edilerek tatbik edilir. Uygun işlemlerle diş kuvveti her noktada yüzeye normal doğrultuda da tatbik edilebilir.

## Düz Dişli Çarkların Sonlu Elemanlar...

Dişler yük paylaşımını sağlayacak hassasiyette imal edilmediği düşünülerek diş kuvvetinin diş ucunda tam değerde etki ettiği kabul edilmiştir. Bu nedenle diş dibinde azami gerilmeyi sağlayan yük tatbik noktası diş ucudur ve bu durum Şekil 6'da gösterilmiştir[13].



Şekil 6. Diş kuvvetinin diş ucundan tatbiki

Kinematik sınır şartı, diş sektörünün radyal kenarlarına ve tabanına tatbik edilen yer değiştirme kısıtlamalar olup, çözüm bölgesinde bulunacak diş adedini belirler. Bir dişli çarkı tüm dişleri ile modelleme uzun hesaplama zamanı gerektirdiğinden tercih edilmemektedir. Bunun yerine bütün sınır şartları ve parametrelerin tanımlanmasına imkan sağlayan dişli sektörler göz önüne alınır [15,16]. Bir dişte meydana gelen gerilmeler, öncelikle o dişe doğrudan tatbik edilen kuvvete bağlıdır. En kötü hal olarak tüm yükün temastaki tek dişin taşıdığı hal ele alındığında, tek bir dişten oluşan sektör halindeki modeli tesis etmek uygun bir çözümdür. Böylece kalan kısımda yerdeğiştirmeler ihmal edilerek model basitleştirilmektedir [2,3,17].

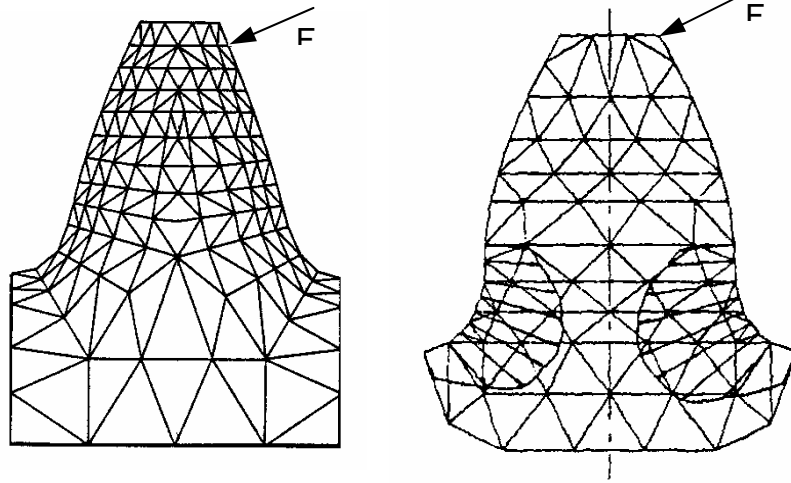
## 5. DİŞLİ MODELİNİN GERİLME ANALİZİ VE KARŞILAŞTIRILMASI

Literatürdeki genel eğilimde dişli çark sonlu eleman modelleri tek dişten tesis edilmiştir. Diş kuvvetinde modellere tekil yük olarak tatbik edilmiştir. Ağlar incelendiğinde diş merkez doğrusuna simetrik olarak tesis edildikleri ve kök bölgesindeki gerilme yığılmasını temsil etmek için eleman yoğunluğunun bu bölgeden simetri eksenine göre tedrici olarak azaltıldığı görülmektedir. Literatürde mevcut çalışmalardan ikisi aşağıda sunulmuştur.

Chabert ve arkadaşları, iki boyutlu dişli çark sonlu eleman modelini 6-düğüm noktalı üçgen elemanlar ile tesis etmişlerdir. Düzlem birim şekil değiştirme kabulü yapılmıştır. Hesaplamalarda kolaylık açısından tek dişten tesis edilen modelin yeterli olacağı belirtilmiştir. Yük diş ucuna yakın bir mesafeden tekil olarak tatbik edilmiştir. Şekil 7-a' da tesis edilen model görülmektedir.

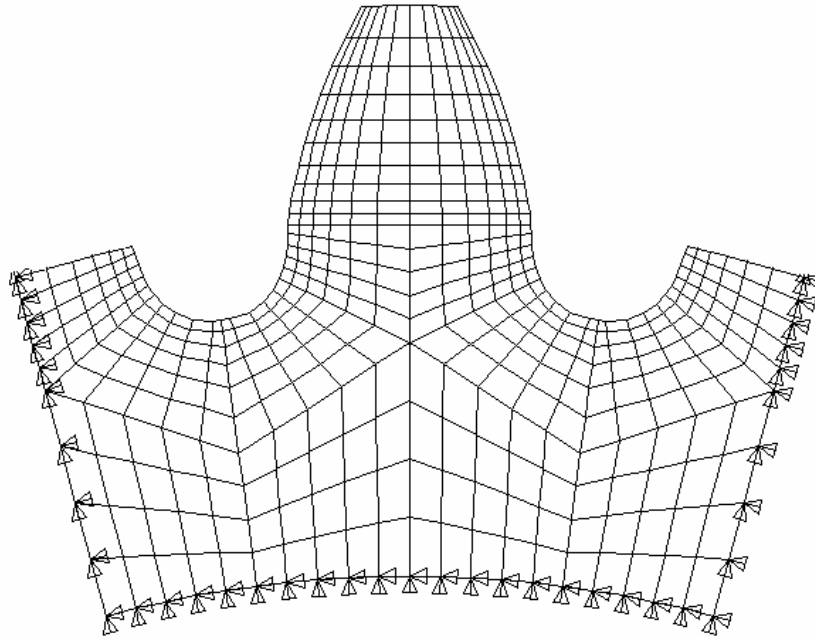
Tobe ve arkadaşları, 6-düğüm noktalı eleman tesisinde düzlem birim şekil değiştirme halini kabul etmişlerdir. Yük diş ucuna tekil olarak tatbik edilmiştir. Şekil 7-b'de model görülmektedir.

Bu çalışmada geliştirilen ve kök bölgesinin sınır şartlarının etkisinden izole edildiği dişli çark sonlu eleman modeli Şekil 8'de görülmektedir.



(a) Chabert ve arkadaşları'nın modeli [2] (b) Tobe ve arkadaşları'nın modeli [3]

Şekil 7. Literatürde tesis edilmiş dişli modelleri



Şekil 8. Dişli çark sonlu eleman modeli

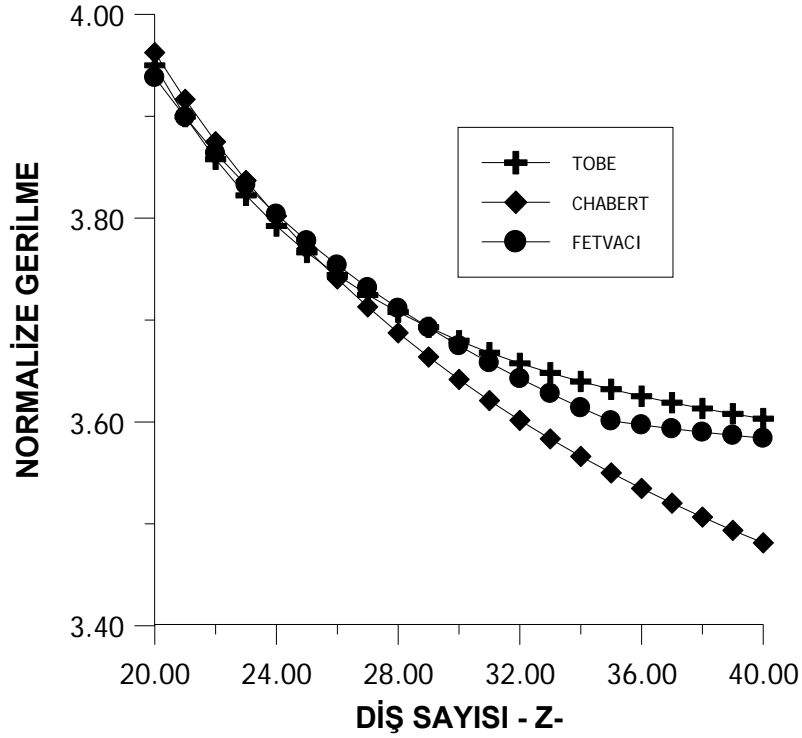
Bu çalışmada, gerilme analizi için tesis edilen modelde, modül  $m=3$  mm, diş sayısı  $z=20$  ve kavrama açısı  $\alpha=20^\circ$  ve sektör kalınlığı  $2m$  olarak alınmıştır. Analizler,  $N=6$  kW

## Düz Dişli Çarkların Sonlu Elemanlar...

gücünde ve  $n=1500d/d$  hız değerinde sabit moment nakline göre belirtilen diş sayılarında yapılmıştır.

Chabert ve arkadaşları ile Tobe ve arkadaşları'nın tesis ettikleri modeller ile bulunan neticelerin, bu çalışmada tesis edilen modelden elde edilen neticeler ile karşılaştırılmasında modül, diş sayısı ve sektör kalınlığı ele alınmıştır. Ancak dişdibi gerilmelerini belirleyen faktörlerden biri olan ve Şekil 3'de gösterilen kesici takıma ait uç yuvarlatma yarıçapı DIN 867 standartında belirlenen  $0.375m$  değeri ile kullanılmış olup, değişiminin dişdibi gerilmeleri üzerindeki etkisi çalışma konusu dışında tutulmuştur.

Normalize gerilme  $\sigma_N$ , çekme tarafındaki maksimum gerilme  $\sigma_T$ , diş kuvveti  $F$ , modül ve diş genişliğine bağlı olarak  $\sigma_N = \sigma_T / (F / b \cdot m)$  ifadesiyle verilmiştir. Çekme tarafındaki maksimum gerilme, diş kuvvetine göre normalize edilmiş değerler birim diş genişliği ( $b=1$ ) için hesaplanmıştır. Normalize gerilme değerlerinin diş sayılarına göre değişimi Şekil 9'da gösterilmiştir.



Şekil 9. Diş sayısına göre gerilmelerin değişimi

Chabert ve arkadaşlarının kullandığı model, üçgen elemanlardan oluşmakta, bu çalışmada tatbik edilen dişli modeli ise dörtgen elemanlardan oluşmaktadır. Diş sayısının 20'den 40 kadar olan değerleri için azami gerilmenin değişimi Tobe ve arkadaşlarının elde ettiği değerlere yakın değerlerdedir. Değerler arasındaki fark seçilen eleman tipinin etkisini göstermektedir. Chabert ve arkadaşlarının elde ettiği gerilme değerlerindeki farklılık, çözüm bölgesinin sınırlarından kaynaklanmaktadır.



## 6. SONUÇ

Çalışmada düz dişli çarkın sonlu elemanlar metodu ile incelenmesi için yapılması gereken kabuller ve izlenen adımlar izah edilmiştir. Diş geometrisinin elde edilmesi ve sonlu eleman paket programında problemin ele alınma tarzı açıklanmıştır. Bu konuda literatürde yer alan mevcut dişli modellerinin incelenmesiyle, ikinci dereceden dörtgen elemanlardan oluşan yeni bir düz dişli çark sonlu eleman modeli geliştirilmiş ve modellemeye ait bilgiler çalışmada sunulmuştur. Geliştirilen dişli modelinden elde edilen gerilme değerleri, 20 ila 40 arasındaki diş sayılarında literatürdeki değerler ile karşılaştırılmıştır. Tobe ve arkadaşlarının değerleri ile örtüştüğü, Chabert ve arkadaşlarının modelinden elde edilen neticelerle ise 26 ve altındaki diş sayısını değerlerinde aynı olduğu görülmüştür.

Yüksek diş sayılarında literatürde yer alan tek bir dişten oluşan modelde kök bölgesi, uygulanan sınır şartlarından etkilendiğinden uygun netice vermemektedir. Bu nedenle kök bölgesinin tamamen izole edildiği geliştirilen dişli modelinin kullanılması yerinde olacaktır.

## KAYNAKLAR

- [1] Wilcox, L., Coleman, W., "Application of Finite Elements to the Analysis of Gear Tooth Stresses", ASME Journal of Engineering for Industry, 95, 1139-1147, 1973.
- [2] Chabert, G., Tran, T.D., Mathis, R., "An Evaluation of Stresses and Deflection of Spur Gear Teeth Under Strain", ASME Journal of Engineering for Industry, 96, 85-93, 1974.
- [3] Tobe, T., Kato, M., Inoue, K., "True Stress and Stiffness of Spur Gear Teeth", ASME Proceedings of the 5<sup>th</sup> World Congress on Theory of Machines and Mechanisms, 1105-1108, 1979.
- [4] Litvin, F.L., "Gear Geometry and Applied Theory", PTR Prentice Hall, New Jersey, 1994.
- [5] Buckingham, E., "Analytical Mechanics of Gears", McGraw-Hill, New York, 1949.
- [6] Hefeng, B., Savage, M. and Knorr, R.J., Computer Modelling of Rack Generated Spur Gears, Mechanisms and Machine Theory, 20, 351-360, 1985.
- [7] Chang, H.L., Tsai, Y.C., A., "Mathematical Model Of Parametric Tooth Profiles for Spur Gears", ASME Journal of Mechanical Design, 114: 8-16, 1992.
- [8] Fetvacı, M.C., İmrak, C.E., "Bilgisayar Desteği ile Dişli Çark Görsel Materyallerin Elde Edilmesi", Mühendis ve Makina, Cilt 44, Sayı 524, Eylül 2003, 48-51.
- [9] Becker, A.A., "The Boundary Element Method in Engineering", McGraw-Hill, Cambridge, 1992.
- [10] Moaveni, S., "Finite Element Analysis: Theory and Application with ANSYS", Prentice Hall, New Jersey, 1999.
- [11] Wilcox, L., "Finite Element Analysis Pinpoints Gear Tooth Stresses", Machine Design, 50: (4) 88-92, 1978.
- [12] Akkurt, M., "Makina Elemanları Cilt 3 Dişli Çarklar", Birsen Yayınevi, 1986.
- [13] Colbourne, J.R., "The Geometry of Involute Gears", Springer-Verlag, New Jersey, 1987.
- [14] Fetvacı, M.C., "ANSYS Sonlu Elemanlar Analiz Programı ile Düz Dişli Çarkların Modellenmesi", Mühendis ve Makina, Sayı 474, 41-44, Temmuz 1999.
- [15] Sfakiotakis, V.G., Vaitsis, J.P., Anifantis, N.K., "Numerical Simulation of Conjugate Spur Gear Action", Computers and Structures, 79, 1153-1160, 2001.
- [16] Fetvacı, M.C., İmrak, C.E., "Dişli Çarkların Gerilme Analizi İçin Sonlu Eleman Modellenmesi, TMMOB Makina Mühendisleri Odası Konya Şubesi II. Makina Tasarım ve İmalat Teknolojileri Kongresi, 26-27 Eylül 2003, 363-370.
- [17] Moslehy, F.A., Ahlqvist, J., Ionescu, I., "Optimization of Gear Tooth Stresses Using Internal Relief Holes", Proc. of the 2000 Int. Conf. on Industry Engineering And Management System (IEMS2k), Cocoa Beach, FL, Mart 2000.