

Invited Review Paper / Çağrılı Derleme Makalesi
REGULARIZED TRACES OF DIFFERENTIAL OPERATORS

Mehmet BAYRAMOĞLU^{*1}, Ehliman ADIGÜZELOV²

¹*Yıldız Teknik Üniversitesi, Kimya-Metalurji Fakültesi, Matematik Mühendisliği Böl., Davutpaşa-İSTANBUL*

²*Yıldız Teknik Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü, Davutpaşa-İSTANBUL*

Geliş/Received: 15.04.2005

ABSTRACT

This is a survey article with three parts about the scientific works done on regularized trace which are the generalization of trace formulas of matrices and nuclear operators for differential operators. Here the second part is about [32] and the third part is about [33].

Keywords: Hilbert space, Nuclear operator, Eigenvalue, Spectrum, Adjoint operator, Trace of matrix, Regularized trace.

MSC number / numarası: 34L10, 34L40

DİFERANSİYEL OPERATÖRLERİN DÜZENLİ İZLERİ

ÖZET

Bu çalışma matrislerin ve çekirdek operatörlerin izi kavramının diferansiyel operatörler için geliştirilmesi olan düzenli iz konusunda yapılan bilimsel çalışmalarla ilgili bir derleme makalesi olup üç kısımdan oluşmaktadır. 2. kısımda [32] ve 3. kısımda [33] çalışmaları yer almaktadır.

Anahtar Sözcükler: Hilbert uzayı, Çekirdek operatör, Özdeğer, Spektrum, Kendine eş operatör, Matris izi, Düzenli iz.

1. GİRİŞ

Bir $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n$ matrisinin $\text{tr } A$ ($\text{tr } A = \text{trace } A$) izi

$$\text{tr } A = a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn}$$

olarak tanımlanır. $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ A matrisinin

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

karakteristik denkleminin çözümleri olsun. Burada her çözüm kendi katlılık sayısı kadar yazılmıştır. Söz konusu çözümler A matrisinin özdeğerleridir. Bilindiği gibi

* Sorumlu Yazar/Corresponding Autor: e-posta:mbayram@yildiz.edu.tr, Tel: (0212) 449 16 87

$$\text{tr } A = \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n \quad (1)$$

dir.

H sonsuz boyutlu ayrılabilir bir Hilbert uzayı ve $\sigma_\infty(H)$ H den H ye tüm tam sürekliliği operatörlerin kümesi olsun. $A \in \sigma_\infty(H)$ ise A^*A kendine eş negatif olmayan bir operatördür ve

$(A^*A)^{\frac{1}{2}} \in \sigma_\infty(H)$, [1]. Bu operatörün sıfırdan farklı özdeğerleri $s_1 \geq s_2 \geq \dots \geq s_k$ ($0 \leq k \leq \infty$) olsun. Burada her özdeğer kendi katlılık sayısı kadar yazılmıştır.

$(A^*A)^{\frac{1}{2}}$ negatif olmayan bir operatör olduğundan s_1, s_2, \dots, s_k pozitif sayılardır. Bu sayılara A operatörünün s sayıları denir. $k < \infty$ ise $s_j = 0$; $j = k+1, k+2, \dots$ kabul edilir. A'nın s sayıları bazen $s_j(A)$ ($j=1,2,\dots$) şeklinde de yazılabilir. $s_1(A) = \|A\|$ olduğunu belirtelim. A normal operatör ise

$$s_j(A) = |\lambda_j(A)| \quad (j=1,2,\dots,k)$$

dir, [1]. Burada $|\lambda_1(A)| \geq |\lambda_2(A)| \geq \dots \geq |\lambda_k(A)|$, A operatörünün sıfırdan farklı özdeğerleridir. s sayıları

$$\sum_{j=1}^{\infty} s_j^p(A) < \infty \quad (p \geq 1)$$

koşulunu sağlayan tüm $A \in \sigma_\infty(H)$ operatörlerinin kümesi σ_p ya da $\sigma_p(H)$ simgesiyle gösterilir. σ_p ($p \geq 1$)

$$\|A\|_{\sigma_p(H)} = \left[\sum_{j=1}^{\infty} s_j^p(A) \right]^{\frac{1}{p}} \quad (A \in \sigma_p(H))$$

fonksiyonu ile ayrılabilir bir Banach uzayıdır, [1]. $\sigma_1(H)$ uzayına ait olan bir başka deyişle s sayıları $\sum_{j=1}^{\infty} s_j(A) < \infty$ koşulunu sağlayan $A \in \sigma_\infty(H)$ operatörüne çekirdek operatörü denir.

$A \in \sigma_p(H)$ ve $T \in B(H)$ ise $AT, TA \in \sigma_p(H)$ ve

$$\begin{aligned} \|AT\|_{\sigma_p(H)} &\leq \|T\| \cdot \|A\|_{\sigma_p(H)} \\ \|TA\|_{\sigma_p(H)} &\leq \|T\| \cdot \|A\|_{\sigma_p(H)} \end{aligned}$$

dir.

A bir çekirdek operatörü ise her $\{e_j\}_1^\infty \subset H$ ortonormal tabanı için $\sum_{j=1}^{\infty} (Ae_j, e_j)$ serisi yakınsaktır ve bu serinin toplamı $\{e_j\}_1^\infty$ tabanının seçimine bağlı değildir, [1]. Söz konusu serinin toplamına A operatörünün matris izi denir ve $\text{tr } A$ ile gösterilir. $\text{tr } A$ için

Regularized Traces of Differential...

$$\text{tr } A = \sum_{j=1}^{\nu(A)} \lambda_j(A) \quad (2)$$

formülünün sağlandığı bilinmektedir, [1]. Burada her λ_j özdeğeri kendi cebirsel katlılığı kadar toplanmıştır. $\nu(A)$ sıfırdan farklı özdeğerlerin cebirsel katlılıklarının toplamıdır.

Diferansiyel operatörlerin düzenli izi matrislerin ve çekirdek operatörlerinin izlerinin genelleştirilmesi olarak kabul edilebilir. Skaler diferansiyel operatörlerin düzenli izi ile ilgili araştırmalar ilk olarak [2] çalışması ile başlamıştır. Bu çalışmada $q(x)$ $[0, \pi]$ aralığında tanımlı, reel değerli ve sürekli türeve sahip olan bir fonksiyon ve h, H herhangi reel sabitler olmak üzere

$$-y''(x) + [q(x) - \lambda]y(x) = 0 \quad (3)$$

$$y'(0) - hy(0) = 0, \quad y'(\pi) + Hy(\pi) = 0 \quad (4)$$

regüler Sturm-Liouville problemi göz önüne alınmıştır. Bu problemin $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n, \dots$ özdeğerleri için

$$\lambda_n = n^2 + c + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \quad (5)$$

asimtotik formülünün sağlandığı bilinmektedir. Burada

$$c = \frac{1}{\pi} \left[\int_0^{\pi} q(t) dt + h + H \right] \quad (6)$$

dır. Görüldüğü gibi $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n$ serisi iraksaktır. Dolayısıyla matrisler ve çekirdek operatörleri için sağlanan (1) ve (2) iz formülleri (3), (4) problemi için söz konusu değildir. Bununla birlikte (3), (4) problemi için farklı bir iz kavramı verilebilir. Bunun için [2] çalışmasında (3) denkleminin yanı sıra

$$-y''(x) - \mu y(x) = 0 \quad (7)$$

denklemini de göz önüne alınmıştır. $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n, \dots$ (7), (4) probleminin özdeğerleri ise (5) ve (6) formüllerinden

$$\int_0^{\pi} q(t) dt = 0$$

koşulu sağlandığı takdirde $\sum_{n=1}^{\infty} (\lambda_n - \mu_n)$ serisinin yakınsak olduğu görülmektedir. Söz konusu serinin toplamına (3), (4) Sturm-Liouville probleminin düzenli izi denir. [2] çalışmasında

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\lambda_n - \mu_n) = \frac{1}{4} [q(0) + q(\pi)] + hH$$

şeklinde bir düzenli iz formülü bulunmuştur.

[2] çalışmasından sonra [2]-[19] çalışmalarında ve birçok başka çalışmalarda çeşitli skaler diferansiyel operatörlerin düzenli izleri incelenmiştir.

Operatör katsayılı diferansiyel operatörlerin düzenli izleri [20]-[37] çalışmalarında incelenmiştir.

2. SINIRLI OPERATÖR KATSAYILI VE TEKİLLİĞE SAHİP OLAN STURM-LIOUVILLE OPERATÖRÜNÜN DÜZENLİ İZİ HAKKINDA

H sonsuz boyutlu ayrılabilir bir Hilbert uzayı olmak üzere $H_1 = L_2[H; (0,1)]$ Hilbert uzayında

$$\begin{aligned} \ell_0[y] &= -y''(x) + \frac{\nu^2 - \frac{1}{4}}{x^2} y(x) \\ \ell[y] &= -y''(x) + \frac{\nu^2 - \frac{1}{4}}{x^2} y(x) + Q(x)y(x) \end{aligned}$$

diferansiyel ifadeleri ve aynı

$$\lim_{x \rightarrow 0} y(x)x^{\nu - \frac{1}{2}} = 0, \quad y(1) = 0; \quad \nu \in \left[\frac{1}{2}, 1 \right) \quad \text{iken}$$

$$y(1) = 0; \quad \nu \in [1, \infty) \quad \text{iken}$$

sınır koşulları ile oluşturulan kendine eş operatörler sırasıyla L_0 ve L olsun.

H_1 uzayında normu $\|\cdot\|_{H_1}$ ile gösterelim ve $Q(x)$ operatör fonksiyonunun aşağıdaki koşulları sağladığını varsayalım:

1. $Q(x)$ $[0,1]$ aralığında ikinci mertebeden zayıf türeve sahiptir ve her $x \in [0,1]$ için $Q^{(j)}(x) : H \rightarrow H$ ($j = 0,1,2$) kendine eş çekirdek operatördür;
2. $\|Q(x)\|_{H_1} < \frac{1}{2} \min_m (k_{m+1}^2 - k_m^2)$. Burada $0 < k_1 < k_2 < \dots$ ile $J_\nu(x)$ Bessel fonksiyonunu sıfırları gösterilmiştir;
3. H uzayında $\sum_{n=1}^{\infty} \|Q(x)\varphi_n\|_{H_1} < \infty$ olacak şekilde bir $\{\varphi_n\}_1^{\infty}$ ortonormal tabanı vardır;
4. $\|Q^{(j)}(x)\|_{\sigma_1(H)}$ ($j = 0,1,2$) fonksiyonları $[0,1]$ aralığında sınırlı ve ölçülebilirdir;
5. $\text{tr } Q(x)$ fonksiyonu $[0,\eta]$ aralığında sürekli olacak ve $(0,\eta)$ aralığında sonlu türeve sahip olacak şekilde $\eta \in (0,1)$ sabiti vardır.

L_0 operatörünün spektrumu $\{k_m^2\}_{m=1}^{\infty}$ kümesidir. Bu kümenin her noktası katlılığı sonsuz olan bir özdeğerdir. k_m^2 özdeğerine karşılık gelen ortonormal özvektörler

$$\psi_{mn}^0(x) = \sqrt{2x} J_\nu(k_m x) (J_{\nu+1}(k_m))^{-1} \varphi_n; \quad n = 1, 2, \dots$$

şeklindedir. R_λ^0 ve R_λ sırasıyla L_0 ve L operatörlerinin rezolventleri olsun.

Regularized Traces of Differential...

Yardımcı Teorem 1: $Q(x)$ operatör fonksiyonu 3. koşulunu sağlıyorsa her $\lambda \in \rho(L_0)$ için $QR_\lambda^0 \in \sigma_1(H_1)$.

İspat: L_0 operatörünün ortonormal özvektörleri H_1 uzayında ortonormal bir taban olduğundan

ispat için $\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \|QR_\lambda^0 \psi_{mn}^0\|_{H_1}$ dizisinin yakınsak olduğunu göstermek yeterlidir, [1].

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \|QR_\lambda^0 \psi_{mn}^0\|_{H_1} &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} |k_m^2 - \lambda|^{-1} \|Q\psi_{mn}^0\|_{H_1} \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} |k_m^2 - \lambda|^{-1} \left[\int_0^1 \left(\frac{\sqrt{2x} J_\nu(k_m x)}{J_{\nu+1}(k_m)} \right) \|Q\varphi_n\|^2 dx \right]^{1/2} \end{aligned} \quad (8)$$

dir. $|z|$ in büyük değerleri için sağlanan

$$J_\nu(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \cos(z - \pi\nu) + O\left(z^{-3/2}\right)$$

formülünden yararlanarak kolayca görülebilir ki

$$\left| \frac{\sqrt{x} J_\nu(k_m x)}{J_{\nu+1}(k_m)} \right| \leq \text{const.} \quad (x \in [0, \infty), m \in \mathbb{N}) \quad (9)$$

dir. (8) ve (9) dan

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \|QR_\lambda^0 \psi_{mn}^0\|_{H_1} \leq \text{const} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} |k_m^2 - \lambda|^{-1} \|Q\varphi_n\|_{H_1} \quad (10)$$

elde edilir. $m \rightarrow \infty$ iken

$$k_m \sim \left(m + \frac{\nu}{2} - \frac{1}{4} \right) \pi$$

olduğundan (10) dan

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \|QR_\lambda^0 \psi_{mn}^0\|_{H_1} \leq C_{\lambda, \nu} \sum_{m=1}^{\infty} m^{-2} \sum_{n=1}^{\infty} \|Q\varphi_n\|_{H_1}$$

bulunur. Burada $C_{\lambda, \nu}$ sadece λ ve ν ye bağlı olan pozitif bir sabittir. $\sum_{m=1}^{\infty} \|Q\varphi_n\|_{H_1}$ serisinin yakınsak olduğu göz önüne alınırsa son eşitsizlikten

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \|QR_\lambda^0 \psi_{mn}^0\|_{H_1} < \infty$$

elde edilir.

Teorem 1: $Q(x)$ operatör fonksiyonu 2.ve 3. koşullarını sağlıyorsa

1) L operatörünün spektrumu ayrık

$$\left\{ \left[k_m^2 - \|Q\|_{H_1}, k_m^2 + \|Q\|_{H_1} \right] \right\}_{m=1}^{\infty}$$

aralıklarının birleşiminin bir alt kümesidir;

2) L operatörünün spektrumunun esas kısmı $\{k_m^2\}_{m=1}^{\infty}$ kümesidir.

İspat: 1) $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \bigcup_{m=1}^{\infty} \left[k_m^2 - \|Q\|_{H_1}, k_m^2 + \|Q\|_{H_1} \right]$ ise

$$\|QR_{\lambda}^0\|_{H_1} \leq \|Q\|_{H_1} \|R_{\lambda}^0\|_{H_1} < 1 \quad (11)$$

dir. (11) den $A : B(H_1) \rightarrow B(H_1)$

$$A(T) = R_{\lambda}^0 - TQR_{\lambda}^0$$

tasvirinin bir büzülme tasviri olduğu elde edilir. Dolayısıyla

$$R_{\lambda}^0 - TQR_{\lambda}^0 = T$$

denkleminin $B(H_1)$ uzayına ait olan bir tek çözümü vardır. Öte yandan $R_{\lambda}^0 - R_{\lambda}QR_{\lambda}^0 = R_{\lambda}$ olduğundan $\lambda \in \rho(L)$ dir. Sonuç olarak L operatörünün spektrumu ayrık

$\left\{ \left[k_m^2 - \|Q\|_{H_1}, k_m^2 + \|Q\|_{H_1} \right] \right\}_{m=1}^{\infty}$ aralıklarının birleşiminin bir alt kümesidir:

$\sigma(L) \subset \bigcup_{m=1}^{\infty} \left[k_m^2 - \|Q\|_{H_1}, k_m^2 + \|Q\|_{H_1} \right]$. Teoremin birinci kısmı ispatlanmıştır.

2) Yardımcı Teorem 1 den ve $R_{\lambda} = R_{\lambda}^0 - R_{\lambda}QR_{\lambda}^0$ formülünden $R_{\lambda} - R_{\lambda}^0 \in \sigma_1(H_1)$ elde edilir.

Bu durumda L_0 ve L operatörlerinin spektrumlarının esas kısımlarının aynı oldukları bilinmektedir, [38]. Öte yandan L_0 operatörünün $\{k_m^2\}_{m=1}^{\infty}$ spektrumunun sadece esas kısımdan oluştuğu göz önüne alınırsa L operatörünün spektrumunun esas kısmının $\{k_m^2\}_{m=1}^{\infty}$ kümesi olduğu ortaya çıkar.

Teorem 1 den aşağıdakiler elde edilir:

- L operatörünün spektrumunun $\{k_m^2\}_{m=1}^{\infty}$ kümesine ait olmayan her noktası katlılığı sonlu olan ayrık bir özdeğerdir;
- k_m^2 sayısı L operatörünün katlılığı sonlu ya da sonsuz olan bir özdeğeri olabilir;
- $\{\lambda_{mn}\}_{n=1}^{\infty}$ L operatörünün $\left[k_m^2 - \|Q\|_{H_1}, k_m^2 + \|Q\|_{H_1} \right]$ aralığına ait olan özdeğerleri olmak üzere

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_{mn} = k_m^2$$

dir.

Regularized Traces of Differential...

$\{\psi_{mn}\}_{m,n=1}^{\infty}$ L operatörünün $\{\lambda_{mn}\}_{m,n=1}^{\infty}$ özdeğerlerine karşılık gelen ortonormal özvektörleri ve

$$\varepsilon_0 = 2^{-1} \min_m (k_{m+1}^2 - k_m^2) - \|Q\|, \quad r_p = \left\{ \lambda \in \mathbb{C} : |\lambda - k_p^2| = \|Q\|_{H_1} + \varepsilon_0 \right\}$$

$$B_{mn}^0 = \left(\bullet, \psi_{mn}^0 \right)_{H_1} \psi_{mn}^0, \quad B_{mn} = \left(\bullet, \psi_{mn} \right)_{H_1} \psi_{mn}$$

$$L_{0m}^{(r)} = \sum_{n=1}^{\infty} k_m^{2r} B_{mn}^0, \quad L_m^{(r)} = \sum_{\substack{n=1 \\ \lambda_{mn} \neq 0}}^{\infty} \lambda_{mn}^r B_{mn} \quad (r = -1, 1)$$

olsun.

Yardımcı Teorem 2: 2. ve 3. koşulları sağlanıyorsa $\sum_{n=1}^{\infty} (\lambda_{pn} - k_p^2)$; $p = 1, 2, \dots$ serileri mutlak yakınsaktır.

İspat: $R_\lambda - R_\lambda^0$ operatörü için

$$R_\lambda - R_\lambda^0 = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_{mn}}{\lambda_{mn} - \lambda} - \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_{mn}^0}{k_m^2 - \lambda} \quad (12)$$

formülü sağlanır. L_0 operatörünün her k_m^2 ($m \neq p$) özdeğerinin ve L operatörünün her λ_{mn} ($m \neq p$; $n = 1, 2, \dots$) özdeğerinin r_p çemberinin dışında olduğu göz önüne alınırsa (12) den

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{r_p} \lambda (R_\lambda - R_\lambda^0) d\lambda &= \sum_{n=1}^{\infty} \left[B_{pn}^0 \frac{1}{2\pi i} \int_{r_p} \frac{\lambda}{\lambda - k_p^2} d\lambda - B_{pn} \frac{1}{2\pi i} \int_{r_p} \frac{\lambda}{\lambda - \lambda_{pn}} d\lambda \right] \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} (k_p^2 B_{pn}^0 - \lambda_{pn} B_{pn}) \\ &= L_{0p}^{(1)} - L_p^{(1)} \end{aligned} \quad (13)$$

elde edilir. Kolayca gösterilebilir ki $R_\lambda - R_\lambda^0$ operatör fonksiyonu $\rho(L)$ bölgesinde $\sigma_1(H_1)$ uzayındaki norma göre analitiktir. O halde (13) ten

$$L_{0p}^{(1)} - L_p^{(1)} \in \sigma_1(H_1); \quad p = 1, 2, \dots \quad (14)$$

bulunur. Benzer şekilde

$$L_p^{(-1)} - L_{0p}^{(-1)} \in \sigma_1(H_1); \quad p = 1, 2, \dots \quad (15)$$

olduğu gösterilebilir.

L operatörü sadece sonlu sayıda pozitif olmayan özdeğere sahip olduğundan ispat için

$\sum_{\substack{n=1 \\ \lambda_{pn} > 0}}^{\infty} (\lambda_{pn} - k_p^2)$ serisinin yakınsak olduğunu göstermek yeterlidir. Dolayısıyla aşağıda $\lambda_{pn} > 0$

olduğunu kabul edeceğiz. $\sigma(L_{0p}^{(r)}) = \{0, k_p^{2r}\}$ olduğundan

$$k_p^{2r} \geq \left(L_{0p}^{(r)} \Psi_{pn}, \Psi_{pn} \right)_{H_1}, \quad \lambda_{pn}^r = \left(L_p^{(r)} \Psi_{pn}, \Psi_{pn} \right)_{H_1};$$

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{n \\ \lambda_{pn}^r > k_p^{2r}}} (\lambda_{pn}^r - k_p^{2r}) &\leq \sum_{\substack{n \\ \lambda_{pn}^r > k_p^{2r}}} \left(\left(L_p^{(r)} - L_{0p}^{(r)} \right) \Psi_{pn}, \Psi_{pn} \right)_{H_1} \leq \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left| \left(\left(L_p^{(r)} - L_{0p}^{(r)} \right) \Psi_{mn}, \Psi_{mn} \right)_{H_1} \right| \\ &\leq \left\| L_p^{(r)} - L_{0p}^{(r)} \right\|_{\sigma_1(H_1)} \end{aligned} \quad (16)$$

dır. (14), (15) ve (16) dan

$$\sum_{\substack{n \\ \lambda_{pn}^r > k_p^{2r}}} (\lambda_{pn} - k_p^{2r}) < \infty \quad (17)$$

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{n \\ \lambda_{pn}^r < k_p^{2r}}} (k_p^{2r} - \lambda_{pn}) &\leq \text{const} \sum_{\substack{n \\ \lambda_{pn}^r < k_p^{2r}}} (k_p^{2r} - \lambda_{pn}) k_p^{-2} - \lambda_{pn}^{-2} \\ &= \text{const} \sum_{\substack{n \\ \lambda_{pn}^{-1} < k_p^{-2}}} (\lambda_{pn}^{-1} - k_p^{-2}) < \infty \end{aligned} \quad (18)$$

elde edilir. (17) ve (18) den

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_{pn} - k_p^2| < \infty; \quad p = 1, 2, \dots$$

bulunur.

Her $\lambda \in \rho(L) \cap \rho(L_0)$ için $R_\lambda - R_\lambda^0 \in \sigma_1(H_1)$ olduğundan (5) formülünden ve Yardımcı Teorem 2 den yararlanarak

$$\text{tr}(R_\lambda - R_\lambda^0) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\lambda_{mn} - \lambda} - \frac{1}{k_m^2 - \lambda} \right)$$

elde edilir. Buradan $b_p = 2^{-1}(k_{p+1}^2 - k_p^2)$ olmak üzere

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda|=b_p} \lambda \text{tr}(R_\lambda - R_\lambda^0) d\lambda = \sum_{m=1}^p \sum_{n=1}^{\infty} (k_m^2 - \lambda_{mn}) \quad (19)$$

bulunur. $R_\lambda = R_\lambda^0 - R_\lambda Q R_\lambda^0$ formülünden

Regularized Traces of Differential...

$$R_\lambda - R_\lambda^0 = \sum_{j=1}^N (-1)^j R_\lambda^0 (QR_\lambda^0)^j + (-1)^{N+1} R_\lambda (QR_\lambda^0)^{N+1}$$

elde edilir. Burada N herhangi bir doğal sabittir. (19) dan ve son eşitlikten

$$\sum_{m=1}^p \sum_{n=1}^{\infty} (\lambda_{mn} - k_m^2) = \sum_{j=1}^N M_p^j + (-1)^N (2\pi i)^{-1} \int_{|\lambda|=b_p} \lambda \operatorname{tr} [R_\lambda (QR_\lambda^0)^{N+1}] d\lambda \quad (20)$$

bulunur. Burada

$$M_p^j = \frac{(-1)^{j+1}}{2\pi i} \int_{|\lambda|=b_p} \lambda \operatorname{tr} [R_\lambda^0 (QR_\lambda^0)^j] d\lambda$$

dır. Kolayca gösterilebilir ki

$$M_p^j = (-1)^j (2\pi i)^{-1} \int_{|\lambda|=b_p} \operatorname{tr} [(QR_\lambda^0)^j] d\lambda \quad (21)$$

dır. 5. koşulu sağlandığı takdirde [40] çalışmasında yapılanlara benzer şekilde

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \left[M_p^1 - p \int_0^1 \operatorname{tr} Q(x) dx \right] = \frac{2\nu+1}{4} \int_0^1 \operatorname{tr} Q(x) dx - \frac{1}{4} [2\nu \operatorname{tr} Q(0) + \operatorname{tr} Q(1)] \quad (22)$$

formülünün sağlandığı gösterilebilir.

Aşağıdaki eşitliklerin sağlandığını gösterelim:

$$\lim_{p \rightarrow \infty} M_p^j = 0; \quad j = 2, 3, 4, \dots \quad (23)$$

Bunu önce j = 2 için yapalım. (21) formülünden yararlanarak

$$\begin{aligned} M_p^2 &= (4\pi i)^{-1} \operatorname{tr} \int_{|\lambda|=b_p} (QR_\lambda^0)^2 d\lambda = (4\pi i)^{-1} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \int_{|\lambda|=b_p} \left((QR_\lambda^0)^2 \psi_{mn}^0, \psi_{mn}^0 \right)_{H_1} d\lambda \\ &= (4\pi i)^{-1} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{l_1=1}^{\infty} \sum_{l_2=1}^{\infty} \left| (Q\psi_{mn}^0, \psi_{m_1 n_1}^0)_{H_1} \right|^2 \int_{|\lambda|=b_p} \frac{1}{(\lambda - k_m^2)(\lambda - k_{m_1}^2)} d\lambda \end{aligned} \quad (24)$$

elde edilir. Burada $m, m_1 < p$ yani $k_m^2, k_{m_1}^2 < b_p$ için

$$\int_{|\lambda|=b_p} \frac{1}{(\lambda - k_m^2)(\lambda - k_{m_1}^2)} d\lambda = 0$$

olduğu görülmektedir. Bu eşitliğin $m, m_1 > p$ için de sağlandığı göz önüne alınırsa (24) ten

$$\begin{aligned}
 |M_p^2| &= \left| (4\pi i)^{-2} \sum_{m=1}^p \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m_1=p+1}^{\infty} \sum_{n_1=1}^{\infty} \left| (Q\Psi_{mn}^0, \Psi_{m_1n_1}^0)_{H_1} \right|^2 \int_{|\lambda|=b_p} \frac{1}{(\lambda - k_m^2)(\lambda - k_{m_1}^2)} d\lambda \right| \\
 &= 2^{-1} \sum_{m=1}^p \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m_1=p+1}^{\infty} \sum_{n_1=1}^{\infty} (k_{m_1}^2 - k_m^2)^{-1} \left| (Q\Psi_{mn}^0, \Psi_{m_1n_1}^0)_{H_1} \right|^2 \\
 &\leq 2^{-1} \sum_{m_1=p+1}^{\infty} \sum_{n_1=1}^{\infty} (k_{m_1}^2 - k_p^2)^{-1} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left| (Q\Psi_{m_1n_1}, \Psi_{mn})_{H_1} \right|^2 \\
 &= 2^{-1} \sum_{m_1=p+1}^{\infty} (k_{m_1}^2 - k_p^2)^{-1} \sum_{n_1=1}^{\infty} \left\| Q\Psi_{m_1n_1} \right\|_{H_1}^2 \tag{25}
 \end{aligned}$$

bulunur. (9) dan ve Q(x) in 2. koşulunu sağlamasından yararlanarak

$$\begin{aligned}
 \sum_{n=1}^{\infty} \left\| Q\Psi_{mn}^0 \right\|_{H_1}^2 &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^1 \left\| Q(x) \frac{\sqrt{2x} J_\nu(k_m x)}{J_{\nu+1}(k_m)} \varphi_n \right\|^2 dx \\
 &\leq \text{const} \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^1 \left\| Q(x) \varphi_n \right\|^2 dx \leq \text{const} \tag{26}
 \end{aligned}$$

elde edilir. (25) ve (26) dan

$$|M_p^2| \leq \text{const} \sum_{m=p+1}^{\infty} (k_m^2 - k_p^2)^{-1} \leq \text{const} \sum_{m=p+1}^{\infty} (m^2 - p^2)^{-1}$$

bulunur. Kolayca gösterilebilir ki

$$\sum_{m=p+1}^{\infty} (m^2 - p^2)^{-1} < 2p^{-2} \tag{27}$$

dır. Son iki bağıntıdan

$$\lim_{p \rightarrow \infty} M_p^2 = 0$$

elde edilir. Buna benzer şekilde $\lim_{p \rightarrow \infty} M_p^3 = 0$ olduğu ispatlanabilir.

[1] de ispatlanmış

$$\left\| QR_\lambda^0 \right\|_{\sigma_1(H_1)} \leq \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left\| QR_\lambda^0 \Psi_{mn}^0 \right\|_{H_1}$$

eşitsizliğinden ve 3. koşulundan yararlanarak (10) dan $|\lambda| = b_p$ için

Regularized Traces of Differential...

$$\begin{aligned}
\|QR_\lambda^0\|_{\sigma_1(H_1)} &\leq \text{const} \sum_{m=1}^{\infty} (k_m^2 - \lambda)^{-1} \leq \text{const} \left[\sum_{m=1}^p (|\lambda| - k_m^2)^{-1} + \sum_{m=p+1}^{\infty} (k_m^2 - |\lambda|)^{-1} \right] \\
&= \text{const} \left[\sum_{m=1}^p (k_p^2 + k_{p+1}^2 - 2k_m^2)^{-1} + \sum_{m=p+1}^{\infty} (2k_m^2 - k_p^2 - k_{p+1}^2)^{-1} \right] \\
&\leq \text{const} \left[p(k_{p+1}^2 - k_p^2) + \sum_{m=p+1}^{\infty} (k_m^2 - k_p^2)^{-1} \right]
\end{aligned} \tag{28}$$

bulunur. $|k_m^2 - k_p^2| \geq \text{const}|m^2 - p^2|$ olduğu göz önüne alınırsa (27) ve(28) den

$$\|QR_\lambda^0\|_{\sigma_1(H_1)} \leq \text{const} \left[1 + \sum_{m=p+1}^{\infty} (m^2 - p^2)^{-1} \right] \leq \text{const} \quad (|\lambda| = b_p) \tag{29}$$

elde edilir. Ayrıca

$$\|R_\lambda^0\|_{H_1} \leq \text{const} p^{-1} \quad (|\lambda| = b_p) \tag{30}$$

olduğu gösterilebilir. (21), (29) ve (30) dan yararlanarak

$$\begin{aligned}
|M_p^j| &= (2\pi j)^{-1} \left| \int_{|\lambda|=b_p} \text{tr} \left[(QR_\lambda^0)^j \right] d\lambda \right| \leq (2\pi j)^{-1} \int_{|\lambda|=b_p} \|(QR_\lambda^0)^j\|_{\sigma_1(H_1)} |d\lambda| \\
&\leq (2\pi j)^{-1} \int_{|\lambda|=b_p} \|QR_\lambda^0\|_{\sigma_1(H_1)} \|(QR_\lambda^0)^{j-1}\|_{H_1} |d\lambda| \\
&\leq (2\pi j)^{-1} \int_{|\lambda|=b_p} \|QR_\lambda^0\|_{\sigma_1(H_1)} \|Q\|_{H_1}^{j-1} \|R_\lambda^0\|_{H_1}^{j-1} |d\lambda| \\
&\leq c_j b_p p^{-(j-1)} \leq c_j^{(1)} p^{3-j}
\end{aligned} \tag{31}$$

bulunur. Burada c_j ve $c_j^{(1)}$ sadece j ye bağlı olan pozitif sabitlerdir. (31) den

$$\lim_{p \rightarrow \infty} M_p^j = 0; \quad j = 4, 5, \dots$$

elde edilir. Böylece (23) formülü ispatlanmış oldu.

$|\lambda_{mn} - k_m^2| \leq \text{const} \quad (m, n = 1, 2, \dots)$ olduğu göz önüne alınırsa (30) dan

$$\|R_\lambda\|_{H_1} \leq \text{const} p^{-1} \quad (|\lambda| = b_p) \tag{32}$$

bulunur. (29), (30) ve (32) den yararlanarak

$$\begin{aligned} \left| \int_{|\lambda|=b_p} \lambda \operatorname{tr} \left[R_\lambda (QR_\lambda^0)^{N+1} \right] d\lambda \right| &\leq \int_{|\lambda|=b_p} |\lambda| \left\| R_\lambda (QR_\lambda^0)^{N+1} \right\|_{\sigma_1(H_1)} |d\lambda| \\ &\leq b_p \int_{|\lambda|=b_p} \left\| R_\lambda (QR_\lambda^0)^N \right\|_{H_1} \left\| QR_\lambda^0 \right\|_{\sigma_1(H_1)} |d\lambda| \\ &\leq \operatorname{const} b_p^2 p^{-(N+1)} \\ &\leq \operatorname{const} p^{3-N} \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \int_{|\lambda|=b_p} \lambda \operatorname{tr} \left[R_\lambda (QR_\lambda^0)^{N+1} \right] d\lambda = 0 ; N = 4, 5, \dots \quad (33)$$

olduğu görülmektedir.

(20) formülünden

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^p \left[\sum_{n=1}^{\infty} (\lambda_{mn} - k_m^2) - \int_0^1 \operatorname{tr} Q(x) dx \right] &= \left[M_p^1 - p \int_0^1 \operatorname{tr} Q(x) dx \right] + \sum_{j=2}^N M_p^j + \\ &+ \frac{(-1)^N}{2\pi i} \int_{|\lambda|=b_p} \lambda \operatorname{tr} \left[R_\lambda (QR_\lambda^0)^{N+1} \right] d\lambda \end{aligned} \quad (34)$$

bulunur. (22), (23), (33) ve (34) ten

$$\sum_{m=1}^p \left[\sum_{n=1}^{\infty} (\lambda_{mn} - k_m^2) - \int_0^1 \operatorname{tr} Q(x) dx \right] = \frac{2\nu+1}{4} \int_0^1 \operatorname{tr} Q(x) dx - \frac{1}{4} [2\operatorname{tr} Q(0) + \operatorname{tr} Q(1)] \quad (35)$$

elde edilir. Bu formülün birinci tarafındaki toplama L operatörünün düzenli izi adının verilmesi doğaldır. Böylece aşağıdaki teorem ispatlanmış oldu:

Teorem 2: Q(x) operatör fonksiyonu 1., 2., 3.,4., ve 5. koşullarını sağlıyorsa L operatörünün düzenli izi için (35) formülü sağlanır.

3. SINIR KOŞULUNDA SPEKTRAL PARAMETRE BULUNAN STURM-LIOUVILLE PROBLEMİNİN İKİNCİ DÜZENLİ İZİ İÇİN FORMÜL

Bu kısımda

$$\ell[y] = -y'' + q(x)y = \lambda y \quad (0 \leq x \leq 1) \quad (36)$$

$$\left. \begin{aligned} y'(0) &= 0 \\ -y(1) &= \lambda y'(1) \end{aligned} \right\} \quad (37)$$

sınır değer probleminin 2. düzenli izi için formül verilmiştir. (36) ifadesinde yer alan q(x) fonksiyonunun aşağıdaki koşulları sağladığı varsayılmıştır:

Regularized Traces of Differential...

1. $q(x)$, $[0,1]$ aralığında reel değerli, 3. mertebeden sürekli türe ve sahip olan bir fonksiyondur ve $q(1) = q'(1) = q''(1) = 0$,
2. $\int_0^1 q(x)dx = 0$

H ile $L_2[0,1]$ ve C (C kompleks sayılar kümesidir) Hilbert uzaylarının direkt toplamını gösterelim:

$$H = L_2[0,1] \oplus C$$

H nin herhangi iki $F = \begin{pmatrix} F_1(x) \\ F_2 \end{pmatrix}$ ve $G = \begin{pmatrix} G_1(x) \\ G_2 \end{pmatrix}$ ($F_1(x), G_1(x) \in L_2[0,1]$, $F_2, G_2 \in C$) elemanlarının iç çarpımını

$$(F, G) = \int_0^1 F_1(x) \overline{G_1(x)} dx + F_2 \overline{G_2}$$

şeklinde tanımlayalım. H bir Hilbert uzayıdır.

$D(L) = \left\{ F \in H : F_1(x), F_1'(x) [0,1] \text{ aralığında mutlak sürekli fonksiyonlardır,} \right.$
 $\left. \ell[F_1] \in L_2[0,1], F_1'(0) = 0 \text{ ve } F_2 = F_1(1) \right\}$

olmak üzere $D(L)$ den H ye

$$L[F] = \begin{pmatrix} \ell[F_1] \\ -F_1(1) \end{pmatrix}$$

operatörü (36), (37) problemine karşılık kendine eş bir operatördür. Söz konusu problem L operatörünün yardımıyla

$$L(F) = \lambda F$$

şeklinde yazılabilir. Görüldüğü gibi (36), (37) probleminin spektrumu ile L operatörünün spektrumu çakışır. $q(x) \equiv 0$ olduğu halde (36), (37) problemine yukarıda oluşturduğumuz şekilde karşılık gelen kendine eş operatörü L_0 ile göstereceğiz.

L ve L_0 operatörleri alttan sınırlı ve spektrumları saf ayrıktır, [34]. $\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_n < \dots$ ve $\mu_1 < \mu_2 < \dots < \mu_n < \dots$ sırasıyla L ve L_0 operatörlerinin özdeğerleri olsun. [39] çalışmasından

$$\sqrt{\lambda_n} = \pi(n-1) + O(n^{-2}) \quad (38)$$

asimtotik formülünün sağlandığı ve kendine eş L operatörünün özfonksiyonlarından oluşan tam ortonormal bir dizinin var olduğu bilinmektedir. Dolayısıyla R_λ ve R_λ^0 sırasıyla L ve L_0 operatörlerinin rezolventleri olmak üzere her $\lambda \in \rho(L)$ ve $\mu \in \rho(L_0)$ için R_λ, R_μ^0 H den H ye çekirdek operatörleridir: $R_\lambda, R_\mu^0 \in \sigma_1(H_1)$. Buna göre

$$\text{tr} \left(R_\lambda, R_\lambda^0 \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{\lambda_n - \lambda} - \frac{1}{\mu_n - \lambda} \right]$$

dır. Bu eşitliğin her iki tarafını $\frac{\lambda^2}{2\pi i}$ ifadesi ile çarpıp, m yi istenildiği kadar büyük doğal sayı

kabul ederek $|\lambda| = b_m = \frac{1}{2}(\mu_{m+1} + \mu_m)$ çemberi üzerinde integre edersek

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda|=b_m} \lambda^2 \text{tr} \left(R_\lambda, R_\lambda^0 \right) d\lambda = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda|=b_m} \lambda^2 \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{\lambda_n - \lambda} - \frac{1}{\mu_n - \lambda} \right] d\lambda = \sum_{n=1}^m (\mu_n^2 - \lambda_n^2) \quad (39)$$

elde edilir.

L ve L_0 operatörleri arasında

$$L = L_0 + Q$$

şeklinde bir bağıntı vardır. Burada Q ile

$$QF = \begin{pmatrix} q(x)F_1(x) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad F \in H$$

gösterilmiştir.

$R_\lambda = R_\lambda^0 - R_\lambda Q R_\lambda^0$ formülünden

$$R_\lambda - R_\lambda^0 = \sum_{j=1}^N (-1)^j R_\lambda^0 (Q R_\lambda^0)^j + (-1)^{N+1} R_\lambda (Q R_\lambda^0)^{N+1} \quad (40)$$

bulunur. Bu eşitlikte N herhangi bir doğal sayıdır. (39) ve (40) dan

$$\sum_{n=1}^m (\lambda_n^2 - \mu_n^2) = \sum_{j=1}^N M_m^j + \frac{(-1)^N}{2\pi i} \int_{|\lambda|=b_m} \lambda^2 \text{tr} \left[R_\lambda (Q R_\lambda^0)^{N+1} \right] d\lambda \quad (41)$$

elde edilir. Burada

$$M_m^j = \frac{(-1)^{j+1}}{2\pi i} \int_{|\lambda|=b_m} \lambda^2 \text{tr} \left[R_\lambda^0 (Q R_\lambda^0)^j \right] d\lambda$$

dır. M_m^j için

$$M_m^j = \frac{(-1)^j}{\pi i j} \int_{|\lambda|=b_m} \lambda \text{tr} \left[(Q R_\lambda^0)^j \right] d\lambda \quad (42)$$

eşitliğinin sağlandığı gösterilebilir.

Regularized Traces of Differential...

L_0 operatörünün $\{\mu_n\}_{n=1}^{\infty}$ özdeğerlerine karşılık gelen ortonormal özfonksiyonları $\alpha_n = \sqrt{2} \left[\sqrt{1 + 3\mu_n \sin^2 \sqrt{\mu_n}} \right]^{-1}$ olmak üzere

$$\psi_n = \begin{pmatrix} \alpha_n \cos \sqrt{\mu_n} x \\ \alpha_n \sqrt{\mu_n} \sin \sqrt{\mu_n} x \end{pmatrix} \quad (n = 1, 2, \dots)$$

şeklinde dir. $\{\psi_n\}_{n=1}^{\infty}$ H uzayının ortonormal bir tabanı olduğundan (42) den M_m^1 için

$$\begin{aligned} M_m^1 &= \frac{-1}{\pi i} \int_{|\lambda|=b_m} \lambda \operatorname{tr} (QR_{\lambda}^0)^j d\lambda = \frac{-1}{\pi i} \int_{|\lambda|=b_m} \lambda \sum_{n=1}^{\infty} (QR_{\lambda}^0 \psi_n, \psi_n)_H d\lambda \\ &= \frac{-1}{\pi i} \sum_{n=1}^{\infty} \int_{|\lambda|=b_m} \frac{\lambda (Q\psi_n, \psi_n)_H}{\mu_n - \lambda} d\lambda = 2 \sum_{n=1}^m \mu_n (Q\psi_n, \psi_n)_H \\ &= 2 \sum_{n=1}^m \mu_n \int_0^1 q(x) \alpha_n^2 \cos^2 \sqrt{\mu_n} x dx \end{aligned}$$

elde edilir.

$$T_m(x) = \sum_{n=1}^m \mu_n \alpha_n^2 \cos^2 \sqrt{\mu_n} x \quad (43)$$

olsun. O zaman M_m^1

$$M_m^1 = 2 \int_0^1 q(x) T_m(x) dx \quad (44)$$

şeklinde yazılır. $\lim_{m \rightarrow \infty} M_m^1$ i hesaplayalım. Bunun için aşağıdaki fonksiyonu göz önüne alalım:

$$F(z) = \frac{2z^2 \cos^2 xz}{\sin z (z^3 \sin z - \cos z)}$$

$F(z)$ fonksiyonu kompleks düzlemin $z = \sqrt{\mu_n}$ ($n = 1, 2, \dots$) ve $z = \pi k$ ($\mp k = 0, \mp 1, \mp 2, \dots$) noktalarından başka her noktada analitiktir. Her $z = \mu_n$ ve $z = \pi k$ noktası $F(z)$ fonksiyonunun sadece basit tekil noktası olabilir ve

$$\operatorname{Res}_{z=\sqrt{\mu_n}} F(z) = \alpha_n^2 \mu_n \cos^2 \sqrt{\mu_n} x \quad (45)$$

$$\operatorname{Res}_{z=k\pi} F(z) = -2k^2 \pi^2 \cos^2 k\pi x \quad (46)$$

dır. $F(z)$ fonksiyonu $z = \mu_n$ ve $z = k\pi$ noktasında analitik olduğu halde de bu formüllerin sağlandığı açıktır.

(38) asimtotik formülünden görüldüğü gibi her $m \geq N$ için

$$\sqrt{\mu_m} < \pi(m - \frac{1}{2}) < \sqrt{\mu_{m+1}}$$

olacak şekilde bir N doğal sayısı vardır. Burada B sonsuza giden bir pozitif değişken ve $m \geq N$, $A_m = (m - \frac{1}{2})\pi$ olmak üzere tepe noktaları $\mp Bi, A_m \mp Bi$ olan S dikdörtgeninin Γ sınırı üzerinde $F(z)$ fonksiyonunun integralini hesaplayacağız. Kompleks analizden bilindiği gibi

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} F(z) dz = \sum_{n=1}^m \operatorname{Res}_{z=\sqrt{\mu_n}} F(z) + \sum_{n=1}^{m-1} \operatorname{Res}_{z=\sqrt{\mu_n}} F(z)$$

dir. (43), (45), (46) formüllerinden ve bu son eşitlikten

$$T_m(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} F(z) dz + \sum_{n=1}^{m-1} 2n^2 \pi^2 \cos^2 n\pi x \tag{47}$$

bulunur.

Yardımcı Teorem 3: $x \in [0,1]$ için

$$\int_L F(z) dz = \int_{A_m - i\infty}^{A_m + i\infty} F(z) dz$$

dir.

İspat: L_1, L_2, L_3 ve L_4 yukarıda bahis edilen S dikdörtgeninin kenarları olsun. O takdirde

$$\int_L F(z) dz = \lim_{B \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^4 \int_{L_j} F(z) dz \tag{48}$$

$$\int_{L_1} F(z) dz = \int_{-iB}^{-iB} F(z) dz = \lim_{r \rightarrow 0} \left[\int_{iB}^{ir} F(z) dz + \int_{|z|=r, \operatorname{Re} z \geq 0} F(z) dz + \int_{-ir}^{-iB} F(z) dz \right]$$

dir. $F(z)$ tek fonksiyon olduğundan

$$\int_{L_1} F(z) dz = \lim_{r \rightarrow 0} \int_{|z|=r, \operatorname{Re} z \geq 0} F(z) dz$$

yazılabilir. Diğer taraftan

$$\lim_{z \rightarrow 0} F(z) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{2z^2 \cos^2 xz}{\sin z (z^3 \sin z - \cos z)} = 0$$

olduğundan

$$\int_{L_1} F(z) dz = 0 \tag{49}$$

Regularized Traces of Differential...

elde edilir. Ayrıca $z = u + iv$ olmak üzere $|z|$ in büyük değerleri ve $u \geq 0$ için

$$|F(z)| \leq e^{-(2-2x)|v|}$$

eşitsizliği sağlanır. Dolayısıyla S dikdörtgeninin alt ve üst kenarları olan L_2 ve L_4 üzerindeki

$$\int_{L_2} F(z)dz \text{ ve } \int_{L_4} F(z)dz \text{ integralleri için}$$

$$\lim_{B \rightarrow \infty} \int_{L_2} F(z)dz = \lim_{B \rightarrow \infty} \int_{L_4} F(z)dz = 0 \quad (50)$$

bulunur. (48),(49) ve (50) den

$$\int_L F(z)dz = \int_{A_m - i\infty}^{A_m + i\infty} F(z)dz$$

elde edilir.

(47) formülünden ve Yardımcı Teorem 3 ten

$$T_m(x) = 2 \sum_{n=1}^{m-1} n^2 \pi^2 \cos^2 n\pi x + T_m^1(x) \quad (51)$$

bulunur. Burada

$$T_m^1(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{A_m - i\infty}^{A_m + i\infty} F(z)dz$$

dir. $T_m^1(x)$ i sınırlandırılm. [39] çalışmasında ispatlanmış

$$\alpha_n \cos \sqrt{\mu_n} x = \sqrt{2} \cos(n-1)\pi x + O(n^{-1}) \quad (52)$$

asimtotik formülünden yararlanacağız. (38), (43), (51) ve (52) formüllerinden

$$\begin{aligned} |T_m^1(x)| &= \left| \sum_{n=1}^m \mu_n \alpha_n^2 \cos^2 \sqrt{\mu_n} x - 2 \sum_{n=1}^{m-1} n^2 \pi^2 \cos^2 n\pi x \right| \\ &= \left| \sum_{n=1}^m [(n-1)^2 \pi^2 + O(n^{-1})] \left[2 \cos^2(n-1)\pi x + O(n^{-1}) \right] - 2 \sum_{n=1}^{m-1} n^2 \pi^2 \cos^2 n\pi x \right| \\ &= \left| \sum_{n=1}^m O(n) \right| \leq \text{const } m^2 \end{aligned} \quad (53)$$

elde edilir.

Teorem 3: $q(x)$ fonksiyonu 1. ve 2. koşullarını sağlıyorsa

$$\lim_{m \rightarrow \infty} M_m^1 = -\frac{1}{8} [q''(0) + q''(\pi)]$$

dir.

İspat: (43), (44) ve (51) formüllerinden

$$\begin{aligned}
 M_m^1 &= 2 \int_0^1 q(x) T_m(x) dx = 2 \int_0^1 q(x) \left[2 \sum_{n=1}^{m-1} n^2 \pi^2 \cos^2 n\pi x + T_m^1(x) \right] dx \\
 &= 4 \sum_{n=1}^{m-1} \left[n^2 \pi^2 \int_0^1 q(x) \cos^2 n\pi x dx \right] + 2 \int_0^1 q(x) T_m^1(x) dx
 \end{aligned} \tag{54}$$

elde edilir. $T_m^1(x)$ için

$$\left| T_m^1(x) \right| < \frac{\text{const}}{A_m(1-x)^2}, \quad x \in [0,1)$$

eşitsizliği ispatlanabilir Ayrıca varsayım gereği $q(1) = q'(1) = 0$ olduğundan

$$|q(x)| \leq \text{const}(x-1)^2$$

dir. (53) ten ve bu son iki eşitsizlikten yararlanarak

$$\begin{aligned}
 \left| \int_0^1 q(x) T_m^1(x) dx \right| &\leq \int_0^{1-m^{-3}} |q(x)| |T_m^1(x)| dx + \int_{1-m^{-3}}^1 |q(x)| |T_m^1(x)| dx \leq \text{const } m^{-1}, \\
 \lim_{m \rightarrow \infty} \int_0^1 q(x) T_m^1(x) dx &= 0
 \end{aligned} \tag{55}$$

bulunur.

$q(x)$ fonksiyonu 1. ve 2. koşullarını sağladığından

$$\begin{aligned}
 \sum_{n=1}^m n^2 \pi^2 \int_0^1 q(x) \cos^2 n\pi x dx &= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^m n^2 \pi^2 \int_0^1 q(x) [1 + \cos 2n\pi x] dx \\
 &= \frac{\pi^2}{2} \sum_{n=1}^m n^2 \int_0^1 q(x) \cos 2n\pi x dx \\
 &= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^m \pi^2 n^2 \left[\frac{q(x)}{2n\pi} \sin 2n\pi x \Big|_0^\pi - \frac{1}{2n\pi} \int_0^\pi q'(x) \sin 2n\pi x dx \right] \\
 &= -\frac{1}{4} \sum_{n=1}^m \pi n \int_0^\pi q'(x) \sin 2n\pi x dx \\
 &= -\frac{1}{4} \sum_{n=1}^m \pi n \left[-\frac{q'(x)}{2\pi n} \cos 2n\pi x \Big|_0^\pi + \frac{1}{2n\pi} \int_0^\pi q''(x) \cos 2n\pi x dx \right] \\
 &= -\frac{1}{8} \sum_{n=1}^m \int_0^1 q''(x) \cos 2n\pi x dx \\
 &= -\frac{1}{16} \sum_{n=1}^{2m} \int_0^1 q''(x) \cos nx dx - \frac{1}{16} \sum_{n=1}^{2m} (-1)^n \int_0^1 q''(x) \cos nx dx
 \end{aligned}$$

Regularized Traces of Differential...

$$= -\frac{1}{32} \sum_{n=1}^{2m} \sqrt{2} \cos(n.0) \int_0^{\pi} q''(x) \sqrt{2} \cos nx \, dx -$$

$$-\frac{1}{32} \sum_{n=0}^{2m} \sqrt{2} \cos n\pi \int_0^{\pi} q''(x) \sqrt{2} \cos nx \, dx$$

dir. Bu eşitliğin sağ tarafındaki toplamlar $q''(x)$ fonksiyonunun $[0,1]$ aralığında $\{\cos nx\}_{n=0}^{\infty}$ fonksiyonlarına göre Fourier serisinin kısmi toplamlarının 0 ve 1 noktalarındaki değerleridir. Buna göre

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^m n^2 \pi^2 \int_0^{\pi} q(x) \cos^2 n\pi x \, dx = -\frac{1}{32} [q''(0) + q''(1)]$$

dir. (54), (55) formüllerinden ve bu son eşitlikten

$$\lim_{m \rightarrow \infty} M_m^1 = -\frac{1}{8} [q''(0) + q''(\pi)]$$

bulunur.

Teorem 4: 1. ve 2. koşulları sağlandığı takdirde

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \lambda_n^2 - \mu_n^2 - 2 \sum_{j=2}^5 (-1)^j j^{-1} \operatorname{Res}_{\lambda=\lambda_n} [\lambda \operatorname{tr}(QR_{\lambda}^0)^j] \right\} = -\frac{[q''(0) + q''(\pi)]}{8}$$

dir.

İspat: Önce λ nın büyük değerleri için $|\lambda| = b_m$ çemberi üzerinde $\|R_{\lambda}^0\|$ ı sınırlandıralım. R_{λ}^0 nın özdeğerleri $\{(\mu_n - \lambda)^{-1}\}_{n=1}^{\infty}$ dir. $n \leq m$ ise

$$|\mu_n - \lambda| > |\mu_n - |\lambda|| = \left| \mu_n - \frac{1}{2}(\mu_{m+1} + \mu_m) \right| \geq \frac{1}{2}(\mu_{m+1} - \mu_m)$$

$n > m$ ise

$$|\mu_n - \lambda| = \frac{1}{2}(2\mu_n - \mu_{m+1} - \mu_m) \geq \frac{1}{2}(\mu_n - \mu_m)$$

dir. Ayrıca (38) den

$$\mu_n = \pi^2(n-1)^2 + O(n^{-1}) \quad (56)$$

elde edilir. Dolayısıyla

$$|\mu_n - \lambda| \geq \frac{1}{2}(\pi^2 m^2 - 1 - \pi^2(m-1)^2 - 1) > m, \quad (n \leq m) \quad (57)$$

$$|\mu_n - \lambda| \geq \frac{1}{2}(\pi^2(n-1)^2 - 1 - \pi^2(m-1)^2 - 1) > n^2 - m^2, \quad (n > m) \quad (58)$$

$$|\mu_n - \lambda| > (m+1)^2 - m^2 > m \quad (n > m)$$

olur. Böylece $|(\mu_n - \lambda)^{-1}| < m^{-1}$ ($n = 1, 2, \dots$) ve bu nedenle

$$\|R_\lambda^0\| < m^{-1}, \quad (|\lambda| = b_m) \tag{59}$$

dir. Benzer şekilde

$$\|R_\lambda\| < \text{const } m^{-1}, \quad (|\lambda| = b_m) \tag{60}$$

olduğu gösterilebilir.

Bu kez de $|\lambda| = b_m$ çemberi üzerinde $\|R_\lambda^0\|_{\sigma_1(H)}$ yi sınırlandıralım. (57) ve (58) den yararlanarak

$$\begin{aligned} \|R_\lambda^0\|_{\sigma_1(H)} &= \sum_{n=1}^{\infty} S_n(R_\lambda^0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|\lambda - \mu_n|} = \sum_{n=1}^m \frac{1}{|\lambda - \mu_n|} + \sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{1}{|\lambda - \mu_n|} \\ &< 1 + \sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{1}{n^2 - m^2} = 1 + \left[\frac{1}{(m+1)^2 - m^2} + \int_{m+1}^{\infty} \frac{dx}{x^2 - m^2} \right] \\ &= 1 + \frac{1}{2m+1} + \frac{1}{2m} \ln(2m+1) < 2 \end{aligned} \tag{61}$$

bulunur. (42), (56), (59) ve (61) den

$$\begin{aligned} |M_m^j| &\leq \frac{1}{\pi^j} \int_{|\lambda|=b_m} |\lambda| \left| \text{tr} \left[(QR_\lambda^0)^j \right] \right| |d\lambda| \leq \frac{1}{\pi^j} \int_{|\lambda|=b_m} |\lambda| \| (QR_\lambda^0)^j \|_{\sigma_1(H)} |d\lambda| \\ &\leq \frac{1}{\pi^j} \int_{|\lambda|=b_m} |\lambda| \|Q\|^j \|R_\lambda^0\|^{j-1} \|R_\lambda^0\|_{\sigma_1(H)} |d\lambda| \leq \text{const } m^4 m^{-(j-1)} \\ &= \text{const } m^{5-j}, \end{aligned}$$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} M_m^j = 0, \quad j \geq 6 \tag{62}$$

elde edilir. Benzer şekilde (56), (60) ve (61) den

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \int_{|\lambda|=b_m} \lambda^2 \text{tr} \left[R_\lambda (QR_\lambda^0)^{N+1} \right] d\lambda = 0, \quad N \geq 6 \tag{63}$$

bulunur. (41), (42), (62), (63) ten ve Teorem 3 ten

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \lambda_n^2 - \mu_n^2 - 2 \sum_{j=2}^5 (-1)^j j^{-1} \text{Res}_{\lambda=\lambda_n} \left[\lambda \text{tr} (QR_\lambda^0)^j \right] \right\} = -\frac{1}{8} [q''(0) + q''(\pi)] \tag{64}$$

elde edilir.

(64) formülünün sol tarafındaki serinin toplamına (36), (37) sınır değer probleminin 2. düzenli izi denir.

KAYNAKLAR

- [1] Gohberg, I. C. and Krein, M. G. , “Introduction to the Theory Linear non-self Adjoint Operators”, Translation of Mathematical Monographs, Vol. 18 (AMS, Providence, R. I., 1969).
- [2] Gelfand, I. M. ve Levitan, B. M. , “İkinci Mertebeden bir diferansiyel operatörün özdeğerleri için bir formül hakkında”, Dokl. AN SSSR, 1953, T. 88, No: 4, 593-596.
- [3] Dikiy, L. A., “Gelfand-Levitan ın bir formülü hakkında”, Uspeki Matem. Nauk, 1953, T. 8, No: 2, 119-123.
- [4] Dikiy, L. A., “Sonlu aralıkta verilmiş bir adi diferansiyel denklemin dzeta-fonksiyonu”, İzv. AN SSSR, ser. Matem., 1955, T. 19, No:4, 187-200.
- [5] Dikiy, L. A., “Sturm-Liouville diferansiyel operatörleri için iz formülleri”, Uspeki Matem. Nauk, 1958, T. 13, No: 3, 111-143.
- [6] Gelfand, I. M., “İkinci mertebeden bir diferansiyel operatörün özdeğerleri için formüller”, Uspeki Matem. Nauk, 1956, T. 11, 191-198.
- [7] Halberg, C. J. and Kramer, V. A., “Generalization of the trace concept”, Duke Mathematical Journal, 1960, V. 27, No: 4, 607-618.
- [8] Gasimov, M. G. ve Levitan, B. M., “İki singular Sturm-Liouville operatörünün özdeğerlerinin farklarının toplamı hakkında”, Dokl. AN SSSR, 1963, T.151, No. 5, 1014-1017.
- [9] Levitan, B. M., “Sturm-Liouville operatörünün düzenli izinin hesaplanması”, Uspeki Matem. Nauk, 1964, T. 19, No: 1, 161-165.
- [10] Lidskiy, V. B. ve Sadovniçiy, V. A., “ Bir sınıf tam fonksiyonların sıfırlarının düzenli toplamı”, Dokl. AN SSSR, 1967, T.176, No: 2, 259-262.
- [11] Sadovniçiy, V. A., “ Yüksek mertebeden iki diferansiyel operatörünün farkının izi hakkında”, Differens. Uravneniya, 1966, T. 2, No: 12, 1611-1624.
- [12] Sadovniçiy, V. A., “Yüksek mertebeden adi diferansiyel operatörlerin izleri hakkında”, Matem. Sbornik, 1967, T. 72, No: 2, 293-317.
- [13] Sadovniçiy, V. A., “ Adi diferansiyel operatörler için iz formülleri”, Matem. Zametki, 1967, T. 1, No: 2, 179-188.
- [14] Sadovniçiy, V. A., “Singüler diferansiyel operatörlerin özdeğerleri için bazı formüller hakkında Bessel fonksiyonunun sıfırları için bağıntılar”, Vestnik MGU, ser. Matem. Mekan., 1971, No: 3, 77-86.
- [15] Sadovniçiy, V. A., “Diferansiyel operatörlerin spectral teorisinde analitik yöntemler”, Izd. MGU, 1973, 1545.
- [16] Sadovniçiy, V. A., “Diferansiyel operatörlerin dzeta-fonksiyonu ve özdeğerleri”, Differens. Uravneniya, 1974, T. 10, No: 7, 1276-1285.
- [17] Guseynov, G. Ş. ve Levitan, B. M., “Sturm-Liouville operatörü için iz formülleri hakkında”, Vestnik MGU, ser. Matem. Mekan., 1978, No: 1, 40-49.
- [18] Dostanic, M. “Trace formula of Gelfand-Levitan type”, Publ. Inst. Math. (Beograd) (N. S.), 1994, V. 55, 51-65.
- [19] Albayrak, I., Akgün, F., “Sonlu aralıkta çift mertebeden bir diferansiyel denklemin düzenli izinin hesaplanması”, Sigma Journal of Engineering and Natural Sciences, 4/2004, 272-278.
- [20] Halilova, R. Z., “Sturm-Liouville operator denkleminin izinin düzenlenmesi hakkında”, Funks. Aaliz, Teoriya Funktsiy i ik Pril Mahaçkala, 1976, No: 3, 1. Bölüm, 154-161.
- [21] Adıgüzelov, E. E. “Operatör katsayılı iki Sturm-Liouville operatörünün farkının izi hakkında”, İzv. AN SSSR, Seriya Fiz-Tekn. I Mat. Nauk, No: 5, 1976, 20-24.
- [22] Adıgüzelov, E. E., Avcı, H and Gül, E. “The trace formula for Sturm-Liouville operator coefficient”, J. Math. Phys., Volume 42, No: 6, 2001, 1611-1624.

- [23] Adıgüzelov, E. E., Baykal, O. and Bayramov, A., “On the spectrum and regularized trace of the Sturm-Liouville problem with spectral parameter on the boundary condition and with the operator coefficient”, *International Journal of Differential Equations and Applications*, Volume 2, No: 3, 2001, 317-333.
- [24] Adıgüzelov, E. E., Bakşı, Ö. and Baykal, O. , “On a regularized trace of a differential operator with bounded operator coefficient”, *International Math. Journal*, Volume 5, No: 3, 2004, 273-286.
- [25] Adıgüzelov, E. E. and Bakşı, Ö., “On the regularized trace of the differential operator equation given in a finite interval”, *Sigma Journal of Engineering and Natural Sciences*, 1/2004, 47-55.
- [26] Maksudov, F. G., Bayramoğlu, M. and Adıgüzelov, E.E., “On a regularized trace of the Sturm-Liouville operator on a finite interval with the unbounded operator coefficient”, *Dokl. AN SSSR, English translation Soviet Math., Dokl*, 30(1984), No: 1, 169-173.
- [27] Bayramoğlu, M., “Sınırsız operator katsayılı diferansiyel denklemin düzenli izi üzerine”, *Spectral Theory and Its Applications*, No: 7, Bakü, 1987, 15-40.
- [28] Almamedov, M. S., Bayramoğlu, M. and Katanova, V. I. , “Çift mertebeden sınırsız operator katsayılı bir diferansiyel denklem için iz formülleri”, *Dokl. AN SSSR*, 1991, T. 317, No: 3, 521-525.
- [29] Maksudov, F. G., Bayramoğlu, M. and Adıgüzelov, E. E., “On asymptotics of spectrum and trace of high order differential operator coefficients”, *Dođa- Tr. J. of Mathematics*, 17(1993), 1113-128, © TÜBİTAK.
- [30] Almamedov, M. S. , and Katanova, V. I. , “On regularized of the trace of a higher-order differential operator with a bounded operator coefficient”, *Soviet MATH. Dokl. , Vol. 43*, No: 2, 486-491, (1991).
- [31] Almamedov, M. S. , Bayramoğlu, M. and Katanova, V. I. , “On regularized traces of an even-order differential equation with an unbounded operator coefficient”, *Differential Equations* 29, No: 1, 1-9, (1993).
- [32] Bayramoğlu, M. and Adıgüzelov, E. E., “On a regularized trace formula for the Sturm-Liouville operator with a bounded operator coefficient and with a singularity”, *Differential Equations*, 32 (1996), No: 12, 1581-1585, (1997).
- [33] Albayrak, I., Bayramoğlu, M. and Adıgüzelov, E.E., “Formula for the second regularized trace of the Sturm-Liouville problem with a spectral parameter on boundary condition”, *Methods of Functional analysis and topology*, Volume 4, No: 3, 1-8, 1999.
- [34] Albayrak, I., Baykal, O. and Gül, E., “Formula for the highly regularized trace of the Sturm-Liouville operator with unbounded operator coefficients having singularity”, *Turkish Journal of Math.*, V. 25, No: 2, 307-322, 2001.
- [35] Bayramoğlu, M. and Şahintürk, H., “Sınır koşulunda spektral parametre olan operatör katsayılı Sturm-Liouville denklmi için iz formülü”, *International Conference on Functional Analysis*, Kyiv, August 22-26, 2001.
- [36] Bayramoğlu, M. and Şahintürk, H., “Sınır koşulunda spektral parametre olan Sturm-Liouville probleminin düzenli izi üzerine”, *SIAM 50 th Anniversary and 2002 Annual Meeting*, (8-12 Temmuz, 2002), Philadelphia, ABD, 2002.
- [37] Gül, E., “The trace formula for a differential operator coefficients and two terms”, *Dođa-Tr. J. of Mathematics*, 28(2004), 231-254, © TÜBİTAK.
- [38] Kato, T., “*Perturbation theory for linear operators*”, Berlin-Heidelberg-New York; Springer-Verlag, 1980.
- [39] Fulton, S. T., “Two-point boundary value problems with eigenvalue parameter contained in the boundary conditions”, *Proceeding of the Royal Society Edinburgh*, 77A, 293-308, (1977).
- [40] Gaşimov, I. F., “Singüler diferansiyel operator denklemlerin spektrumunun ve düzenli izinin incelenmesi”, *Doktora Tezi*, Bakü, 1990, 123 s.