σ Journal of Engineering and Natural Sciences
Mühendislik ve Fen Bilimleri Dergisi

Sigma
2005/4

AN ASYMPTOTIC FORMULA FOR THE SUM OF THE NEGATIVE EIGENVALUES OF SECOND ORDER DIFFERENTIAL OPERATOR GIVEN IN INFINITE INTERVAL

Özlem BAKŞİ [*1], Sedi İSMAYİLOV [2]

[1] *Yıldız Teknik Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü, Davutpaşa-İSTANBUL*
[2] *Azerbaycan Teknik Üniversitesi, Atomatika ve Hesaplama Teknikasi Fakültesi, Matematik Bölümü, AZERBAYCAN*

Geliş/Received: 08.03.2005 Kabul/Accepted: 05.10.2005

ABSTRACT

Asymptotic formul is founded for the sum of negative eigenvalues of the operator L in $L_2[0,\infty)$ space, where L formed by $l(y)=\left(p(x)y'(x)\right)'-q(x)y(x)$ differantial expression and $y(0)=0$ bounded condition,
Keywords: Self-adjoint operator,Negative eigen value, Spectrum, Asymptotic
MSC number/numarası: 34B24.

SONSUZ ARALIKTA VERİLMİŞ İKİNCİ MERTEBEDEN BİR DİFERANSİYEL OPERATÖRÜN NEGATİF ÖZDEĞERLERİNİN TOPLAMI İÇİN ASİMTOTİK FORMÜL

ÖZET

$L_2[0,\infty)$ uzayında $l(y)=\left(p(x)y'(x)\right)'-q(x)y(x)$ diferansiyel ifadesi ve $y(0)=0$ sınır koşulu ile oluşturulan L operatörünün negatif özdeğerlerinin toplamı için asimptotik formül bulunmuştur.
Anahtar Sözcükler: Kendine eş operatör, Negatif özdeğer, Spectrum, Asimtotik.

1. GİRİŞ

$p(x)$ ve $q(x)$ $[0,\infty)$ aralığında tanımlı ve aşağıdaki koşulları sağlayan herhangi iki fonksiyon olsun.

1) $c_1 \le p(x) \le c_2$ olacak şekilde $c_1, c_2 \in (0,\infty)$ sabitleri vardır.
2) $p(x)$ fonksiyonu monoton azalmayandır ve sürekli türeve sahiptir.
3) $q(x)$ fonksiyonu sürekli, pozitif değerli ve monoton azalandır.
4) $\lim\limits_{x\to\infty} q(x)=0$

$D(L)$ ile

a) $y(x)$ ve $y'(x)$ fonksiyonları her sonlu $[0,a]$ ($a \in (0,\infty)$) aralığında mutlak süreklidir.

[*] Sorumlu Yazar/Corresponding Autor: e-posta: baksi@yildiz.edu.tr, tel: (0212) 449 15 28

b) $y(0) = 0$

c) $\left(p(x)y'(x)\right)' \in L_2(0,\infty)$ koşullarını sağlayan tüm $y \in L_2(0,\infty)$ fonksiyonlarının kümesini gösterelim.

$L : D(L) \to L_2(0,\infty)$

$(Ly)(x) = -\left(p(x)y'(x)\right)' - q(x)y(x)$

kendine eş operatörünü göz önüne alalım. L ye $L_2(0,\infty)$ uzayında

$$l(y) = -\left(p(x)y'(x)\right)' - q(x)y(x) \tag{1}$$

Diferansiyel ifadesi ve $y(0) = 0$ sınır koşulu ile oluşturulan operatör diyeceğiz. L operatörünün alttan yarı-sınırlı ve spektrumunun negatif kısmının ayrık olduğu bilinmektedir [1]. $-\lambda_1 \le -\lambda_2 \le \cdots \le -\lambda_n \le \cdots$ L operatörünün negatif öz değerleri olsun. Bu çalışma da $\varepsilon \to +0$ iken

$$\sum_{-\lambda_j < -\varepsilon} \lambda_j \qquad (\varepsilon > 0)$$

toplamı için asimtotik formül bulunmuştur. [2] çalışmasında L operatörünün negatif öz değerlerinin sayısı için asimtotik formüller bulunmuştur. [3] çalışmasında operatör katsayılı bir diferansiyel operatörün negatif öz değerlerinin sayısının asimtotik ifadeleri bulunmuştur. [4] çalışmasında $L_2(0,\infty)$ uzayında

$$l_1(y) = -y''(x) - q(x)y(x)$$

diferansiyel ifadesi ve $y'(0) = 0$ sınır koşuluyla oluşturulan operatörün negatif öz değerlerinin toplamının asimtotik davranışı incelenmiştir.

2. ÖZDEĞERLER İÇİN BAZI EŞİTSİZLİKLER

$q(x)$ fonksiyonu monoton azalan olduğundan tersi vardır. $q(x)$ in ters fonksiyonu $g(x)$ olsun. Ayrıca, $\varepsilon, g(x)$ fonksiyonunun tanım kümesine ait olan $\varepsilon < q(0)$ koşulunu sağlayan bir sayı olsun.

Aşağıdaki operatörleri göz önüne alalım:

1) $L_2\left[0, g(\varepsilon)\right]$ uzayında (1) ifadesi ve sırasıyla $y(0) = y\left(g(\varepsilon)\right) = 0$, $y'(0) = y'\left(g(\varepsilon)\right) = 0$ sınır koşullarıyla oluşturulan L' ve L'' operatörleri

2) $L_2\left[x_{i-1}, x_i\right]$ uzayında (1) ifadesi ve sırasıyla

$$y(x_{i-1}) = y(x_i) = 0 \; ,$$
$$y'(x_{i-1}) = y'(x_i) = 0$$

sınır koşullarıyla oluşturulan L_i' ve L_i'' operatörleri

3) $L_2\left[x_{i-1}, x_i\right]$ uzayında $-p(x_i)y''(x) - q(x_i)y(x)$

İfadesi ve $y(x_{i-1}) = y(x_i) = 0$ sınır koşullarıyla oluşturulan $L_i^{(1)}$ operatörü

4) $L_2\left[x_{i-1}, x_i\right]$ uzayında $-p(x_{-1i})y''(x) - q(x_{i-1})y(x)$

İfadesi ve $y'(x_{i-1}) = y'(x_i) = 0$ sınır koşullarıyla oluşturulan $L_i^{(2)}$ operatörü

$\left[0, g(\varepsilon)\right]$ aralığını uzunlukları

$$\delta = \frac{g(\varepsilon)}{\left[\left|g^{\alpha}(\varepsilon)\right|\right]+1} \tag{2}$$

olan parçalara bölelim. Burada ε, $g^{\alpha}(\varepsilon) \geq 2$ eşitsizliğini sağlayan herhangi bir pozitif sayı ve $\alpha \in (0,1)$ dir. $\left[\left|g^{\alpha}(\varepsilon)\right|\right]$ ile $g^{\alpha}(\varepsilon)$ sayısının tam kısmı gösterilmiştir. $0 = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_m = g(\varepsilon)$, $[0, g(\varepsilon)]$ aralığının bölüntü noktaları olsun.

L, L' , L'' , L_i' ve $L_i^{(1)}$ operatörlerinin $-\lambda$ dan $(\lambda > 0)$ küçük özdeğerlerinin sayısı sırasıyla $\mathrm{N}(\lambda)$, $\mathrm{N}'(\lambda)$, $\mathrm{N}''(\lambda)$, $\mathrm{n}_\mathrm{i}'(\lambda)$ ve $\mathrm{n}_\mathrm{i}^{(1)}(\lambda)$ olsun. Ayrıca

$\mathrm{n}_\mathrm{i}'(\varepsilon) = \mathrm{n}_\mathrm{i}$ ve $\mathrm{n}_\mathrm{i}^{(1)}(\varepsilon) = \mathrm{n}_\mathrm{i}^{(1)}$ olsun. [2] çalışmasında

$$\mathrm{N}'(\varepsilon) \leq \mathrm{N}(\varepsilon) \leq \mathrm{N}''(\varepsilon) \tag{3}$$

ve $L_i' < L_i^{(1)}$, $L_i'' > L_i^{(2)}$ eşitsizlikleri ispatlanmıştır. (3) nin ispatına benzer şekilde

$$\mathrm{N}'(\lambda) \leq \mathrm{N}(\lambda) \leq \mathrm{N}''(\lambda) \qquad (\lambda \geq \varepsilon) \tag{4}$$

eşitsizlikleri ispatlanabilir. $L_i' < L_i^{(1)}$ eşitsizliğinden

$$\mathrm{n}_\mathrm{i}'(\lambda) \geq n_i^{(1)}(\lambda) \tag{5}$$

elde edilir. [5] R.Courant' ın varyasyon prensiplerinden dolayı

$$N'(\lambda) \geq \sum_{i=1}^{M} n_i^{(1)}(\lambda) \tag{6}$$

dir [6]. (4), (5) ve (6) ten

$$N(\lambda) \geq \sum_{i=1}^{M} n_i^{(1)}(\lambda) \tag{7}$$

bulunur. $L_i^{(1)}$ operatörünün özdeğerleri $-\mu_{i1} < -\mu_{i2} < -\mu_{i3} < \cdots$ olsun.

Teorem 1: $p(x)$ ve $q(x)$ fonksiyonları 1), 2), 3) ve 4) koşullarını sağlıyorsa ε nun küçük pozitif değerleri için

$$\sum_{j=1}^{N(\varepsilon)} \lambda_j > \int_0^{g(\varepsilon)} f(x,\varepsilon)dx - \int_0^{\delta} f(x,\varepsilon)dx - c_3 g^{\alpha}(\varepsilon)$$

dır. Burada $f(x,\varepsilon) = (3\pi)^{-1}[2q(x)+\varepsilon]\sqrt{\dfrac{q(x)-\varepsilon}{p(x)}}$ ve $c_3 > 0$ bir sabittir.

İspat: $L_i^{(1)}$ operatörünün özdeğerleri

$-\mu_{im} = p(x_i)\left(\dfrac{m\pi}{x_i - x_{i-1}}\right)^2 - q(x_i)$ şeklindedir. Buradan

$$\sum_{m=1}^{n_i^{(1)}} \mu_{im} = \sum_{m=1}^{n_i^{(1)}} \left[q(x_i) - p(x_i)\left(\frac{m\pi}{x_i - x_{i-1}}\right)^2 \right]$$
$$= q(x_i)n_i^{(!)} - p(x_i)\pi^2\delta^{-2}\,\frac{n_i^{(!)}\left(n_i^{(!)}+1\right)\left(2n_i^{(!)}+1\right)}{6}$$
$$= q(x_i)n_i^{(!)} - \frac{p(x_i)\pi^2}{6\delta^2}\left[2(n_i^{(!)})^3 + 3(n_i^{(!)})^2 + n_i^{(!)}\right] \tag{8}$$

elde edilir.

$p(x_i)\left(\frac{m\pi}{\delta}\right)^2 - q(x_i) < -\varepsilon$ eşitsizliğinden $n_i^{(1)}$ için

$$\frac{\delta}{\pi}\sqrt{\frac{q(x_i)-\varepsilon}{p(x_i)}} - 1 \le n_i^{(1)} < \frac{\delta}{\pi}\sqrt{\frac{q(x_i)-\varepsilon}{p(x_i)}} \tag{9}$$

bulunur. (8) ve (9) den yararlanarak

$$\sum_{m=1}^{n_i^{(1)}} \mu_{im} \ge q(x_i)\left(\frac{\delta}{\pi}\sqrt{\frac{q(x_i)-\varepsilon}{p(x_i)}} - 1\right) - \frac{p(x_i)\pi^2}{6\delta^2}\ .$$
$$\left[\frac{2\delta^3}{\pi^3}\left(\frac{q(x_i)-\varepsilon}{p(x_i)}\right)^{3/2} + \frac{3\delta^2}{\pi^2}\frac{q(x_i)-\varepsilon}{p(x_i)} + \frac{\delta}{\pi}\sqrt{\frac{q(x_i)-\varepsilon}{p(x_i)}}\right]$$
$$= q(x_i)\delta\pi^{-1}\sqrt{\frac{q(x_i)-\varepsilon}{p(x_i)}} - q(x_i)\frac{p(x_i)\delta}{3\pi}\left(\frac{q(x_i)-\varepsilon}{p(x_i)}\right)^{3/2} - \frac{q(x_i)}{2} + \frac{\varepsilon}{2} - \frac{\pi}{6\delta}\sqrt{p(x_i)(q(x_i)-\varepsilon)}$$
$$= \frac{\delta}{\pi}\sqrt{\frac{q(x_i)-\varepsilon}{p(x_i)}}\left[q(x_i) - \frac{p(x_i)}{3}\frac{q(x_i)-\varepsilon}{p(x_i)}\right] - \frac{3q(x_i)}{2} + \frac{\varepsilon}{2} - \frac{\pi}{6\delta}\sqrt{p(x_i)(q(x_i)-\varepsilon)}$$
$$= \frac{\delta}{\pi}\sqrt{\frac{q(x_i)-\varepsilon}{p(x_i)}}\left[\frac{2}{3}q(x_i) + \frac{\varepsilon}{3}\right] - \frac{3q(x_i)}{2} + \frac{\varepsilon}{2} - \frac{\pi}{6\delta}\sqrt{p(x_i)(q(x_i)-\varepsilon)}$$
$$> \frac{\delta}{3\pi}\sqrt{\frac{q(x_i)-\varepsilon}{p(x_i)}}\left[2q(x_i)+\varepsilon\right] - 2q(x_i) - \delta^{-1}\sqrt{p(x_i)q(x_i)} \tag{10}$$

bulunur.

$f(x,\varepsilon) = (3\pi)^{-1}\left[2q(x)+\varepsilon\right]\sqrt{\frac{q(x)-\varepsilon}{p(x)}}$ alınırsa (10) dan

$$\sum_{m=1}^{n_i^{(1)}} \mu_{im} \ge \delta f(x_i,\varepsilon) - 2q(x_i) - \delta^{-1}\sqrt{p(x_i)q(x_i)} \tag{11}$$

elde edilir. $q(x)$ monoton azalan ve $p(x)$ monoton azalmayan fonksiyonlar olduğundan her sabit $\varepsilon \in (0, q(0))$ için $f(x,\varepsilon)$ fonksiyonu $[0, g(\varepsilon)]$ aralığında monoton azalandır. Dolayısıyla

$$\delta f(x_i,\varepsilon)=\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x_i,\varepsilon)dx > \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x,\varepsilon)dx \tag{12}$$

dir. (11) ve (12) den

$$\sum_{m=1}^{n_i^{(1)}} \mu_{im} \geq \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x,\varepsilon)dx - 2q(0) - \delta^{-1}\sqrt{c_2 q(0)} \tag{13}$$

bulunur. (7) dan yararlanarak

$$\sum_{j=1}^{N(\varepsilon)} \lambda_j \geq \sum_{i=1}^{M}\sum_{m=1}^{n_i^{(1)}} \mu_{im} \tag{14}$$

olduğu gösterilebilir. (13) ve (14) den

$$\sum_{j=1}^{N(\varepsilon)} \lambda_j > \sum_{i=1}^{M-1}\sum_{m=1}^{n_i^{(1)}} \mu_{im} \geq \sum_{i=1}^{M-1}\left[\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x,\varepsilon)dx - 2q(0) - \delta^{-1}\sqrt{c_2 q(0)}\right]$$

$$> \int_{x_1}^{x_M} f(x_1,\varepsilon)dx - 2q(0)M - \delta^{-1}M\sqrt{c_2 q(0)} \tag{15}$$

elde edilir. Öte yandan (2) den

$$\delta > \frac{g(\varepsilon)}{2g^{\alpha}(\varepsilon)} = \frac{1}{2}g^{1-\alpha}(\varepsilon) > \frac{1}{2}$$

$$M = \frac{g(\varepsilon)}{\delta} = \left[\left|g^{\alpha}(\varepsilon)\right|\right] + 1 < 2g^{\alpha}(\varepsilon) \tag{16}$$

bulunur. (15) den ve bu son iki bağıntıdan

$$\sum_{j=1}^{N(\varepsilon)} \lambda_j > \int_0^{g(\varepsilon)} f(x,\varepsilon)dx - \int_0^{\delta} f(x,\varepsilon)dx - c_3 g^{\alpha}(\varepsilon) \quad \text{elde edilir.} \ \square$$

L_i'' ve $L_i^{(2)}$ operatörlerinin öz değerleri sırasıyla $-\gamma_{i1}'' < -\gamma_{i2}'' < \cdots$ ve $-\gamma_{i1}^{(2)} < -\gamma_{i2}^{(2)} < \cdots$ olsun. Ayrıca L_i'' ve $L_i^{(2)}$ operatörlerinin $-\lambda$ dan $(\lambda > 0)$ küçük olan öz değerlerinin sayısı sırasıyla $n_i''(\lambda)$ ve $n_i^{(2)}(\lambda)$ olsun. $L_i'' > L_i^{(2)}$ olduğundan

$$n_i''(\lambda) \leq n_i^{(2)}(\lambda) \tag{17}$$

dır [5]. R. Courant ’ ın varsayım prensipleri gereğince

$$N''(\lambda) \leq \sum_{i=1}^{M} n_i''(\lambda) \tag{18}$$

dir [6]. (4), (17) ve (18) den $N(\lambda) \le \sum_{i=2}^{M} n_i^{(2)}(\lambda) + n_1''(\lambda)$ elde edilir. Bu eşitsizlikten yararlanarak

$$\sum_{j=1}^{N(\varepsilon)} \lambda_j \le \sum_{i=2}^{M} \sum_{m=1}^{n_i^{(2)}} \gamma_{im} + \sum_{m=1}^{n_1''} \gamma_{1m}'' \tag{19}$$

eşitsizliği ispatlanabilir. Burada $n_i^{(2)} = n_i^{(2)}(\varepsilon)$, $n_1'' = n_1''(\varepsilon)$ alınmıştır.

Teorem 2 : 1), 2), 3) ve 4) koşulları sağlanıyorsa $\varepsilon > 0$ ın küçük değerleri için $\sum_{j=1}^{N(\varepsilon)} \lambda_j < \frac{1}{3\pi} \int_0^{g(\varepsilon)} f(x,\varepsilon)dx + c_6 \int_0^{\delta} f(x,\varepsilon)dx + c_6 g^{\alpha}(\varepsilon)$ dır. Burada $c_6 > 0$ bir sabittir.

İspat: $L_i^{(2)}$ operatörünün özdeğerleri

$$-\gamma_{im}^{(2)} = p(x_{i-1})\left(\frac{(m-1)\pi}{x_i - x_{i-1}}\right)^2 - q(x_{i-1}) \qquad (m = 1, 2, \cdots)$$

şeklindedir. Dolayısıyla

$$\begin{aligned} \sum_{m=!}^{n_i^{(2)}} \gamma_{im}^{(2)} &= \sum_{m=!}^{n_i^{(2)}} \left[q(x_{i-1}) - p(x_{i-1})\left(\frac{(m-1)\pi}{x_i - x_{i-1}}\right)^2 \right] \\ &= n_i^{(2)} q(x_{i-1}) - p(x_{i-1})\pi^2 \delta^{-2} \frac{\left(n_i^{(2)} - 1\right) n_i^{(2)} \left(2n_i^{(2)} - 1\right)}{6} \\ &= n_i^{(2)} q(x_{i-1}) - \frac{p(x_{i-1})\pi^2}{6\delta^2} \left[2\left(n_i^{(2)}\right)^3 - 3\left(n_i^{(2)}\right)^2 + n_i^{(2)} \right] \end{aligned} \tag{20}$$

dır.

$p(x_{i-1})\left(\frac{(m-1)\pi}{x_i - x_{i-1}}\right)^2 - q(x_{i-1}) < -\varepsilon$ ifadesinden

$$\frac{\delta}{\pi}\sqrt{\frac{q(x_{i-1}) - \varepsilon}{p(x_{i-1})}} \le n_i^{(2)} < \frac{\delta}{\pi}\sqrt{\frac{q(x_{i-1}) - \varepsilon}{p(x_{i-1})}} + 1 \tag{21}$$

elde edilir. (20) ve (21) den yararlanılarak;

$$\sum_{m=1}^{n_i^{(2)}} \gamma_{im}{}^{(2)} < q(x_{i-1})\left[\frac{\delta}{\pi}\sqrt{\frac{q(x_{i-1})-\varepsilon}{p(x_{i-1})}}+1\right] - \frac{p(x_{i-1})\pi^2}{6\delta^2}\left[\frac{2\delta^3}{\pi^3}\left(\sqrt{\frac{q(x_{i-1})-\varepsilon}{p(x_{i-1})}}\right)^3 + \frac{\delta}{\pi}\sqrt{\frac{q(x_{i-1})-\varepsilon}{p(x_{i-1})}}\right]$$

$$+\frac{p(x_{i-1})\pi^2}{6\delta^2}3\left[\frac{\delta}{\pi}\sqrt{\frac{q(x_{i-1})-\varepsilon}{p(x_{i-1})}}+1\right]^2$$

$$=\frac{\delta}{\pi}\sqrt{\frac{q(x_{i-1})-\varepsilon}{p(x_{i-1})}}\left[q(x_{i-1})-\frac{1}{3}\big(q(x_{i-1})-\varepsilon\big)\right]+q(x_{i-1})$$

$$-\frac{\pi}{6\delta}\sqrt{p(x_{i-1})\big(q(x_{i-1})-\varepsilon\big)}+\frac{\pi^2 p(x_{i-1})}{2\delta^2}\left[\frac{\delta^2}{\pi^2}\frac{q(x_{i-1})-\varepsilon}{p(x_{i-1})}+\frac{2\delta}{\pi}\sqrt{\frac{q(x_{i-1})-\varepsilon}{p(x_{i-1})}}+1\right]$$

$$=\frac{\delta}{\pi}\sqrt{\frac{q(x_{i-1})-\varepsilon}{p(x_{i-1})}}\left[\frac{2}{3}q(x_{i-1})+\frac{\varepsilon}{3}\right]+q(x_{i-1})$$

$$+\frac{5\pi}{6\delta}\sqrt{p(x_{i-1})\big(q(x_{i-1})-\varepsilon\big)}+\frac{1}{2}\left[q(x_{i-1})-\varepsilon\right]+\frac{\pi^2 p(x_{i-1})}{2\delta^2}$$

$$<\frac{\delta}{\pi}\sqrt{\frac{q(x_{i-1})-\varepsilon}{p(x_{i-1})}}\left[\frac{2}{3}q(x_{i-1})+\frac{\varepsilon}{3}\right]+q(0)+\frac{\pi}{\delta}\sqrt{c_2 q(0)}+q(0)+\frac{c_2\pi^2}{\delta^2}$$

bulunur. Burada $\delta > \frac{1}{2}$ olduğu göz önüne alınırsa

$$\sum_{m=1}^{n_i^{(2)}} \gamma_{im}{}^{(2)} < \frac{\delta}{3\pi}\sqrt{\frac{q(x_{i-1})-\varepsilon}{p(x_{i-1})}}\left[2q(x_{i-1})+\varepsilon\right]+c_4 \quad \text{veya}$$

$$\sum_{m=1}^{n_i^{(2)}} \gamma_{im}{}^{(2)} < \delta\, f(x_{i-1},\varepsilon)+c_4 \tag{22}$$

elde edilir. Burada $c_4 > 0$ bir sabittir. Her sabit $\varepsilon \in \big(0, q(0)\big)$ için $f(x,\varepsilon)$ fonksiyonu monoton azalan olduğundan

$$\delta f(x_{i-1},\varepsilon) = \int_{x_{i-2}}^{x_{i-1}} f(x_{i-1},\varepsilon)dx < \int_{x_{i-2}}^{x_{i-1}} f(x,\varepsilon)dx \tag{23}$$

dir. (22) ve (23) dan

$$\sum_{m=1}^{n_i^{(2)}} \gamma_{im}{}^{(2)} < \int_{x_{i-2}}^{x_{i-1}} f(x_{i-1},\varepsilon)dx + c_4 \qquad (i = 2,3,\cdots,m) \tag{24}$$

bulunur.(16), (19) ve (24) den

$$\sum_{j=1}^{N(\varepsilon)} \lambda_j \le \sum_{i=2}^{M}\left[\int_{x_{i-2}}^{x_{i-1}} f(x,\varepsilon)dx + c_4\right] + \sum_{m=!}^{n_1''} \gamma_{1m}'' \quad < \int_0^{g(\varepsilon)} f(x,\varepsilon)dx + c_4 M + \sum_{m=!}^{n_1''} \gamma_{1m}''$$

$$< \int_0^{g(\varepsilon)} f(x,\varepsilon)dx + 2c_4 g^{\alpha}(\varepsilon) + \sum_{m=!}^{n_1''} \gamma_{1m}'' \tag{25}$$

elde edilir. $\sum_{m=!}^{n_1''} \gamma_{1m}''$ toplamı için

$$\sum_{m=!}^{n_1''} \gamma_{1m}'' < c_5 \int_0^{\delta} f(x,\varepsilon)dx + c_5 g^{\alpha}(\varepsilon) \tag{26}$$

eşitsizliği ispatlanabilir. (25) ve (26) den

$\sum_{j=1}^{N(\varepsilon)} \lambda_j < \int_0^{g(\varepsilon)} f(x,\varepsilon)dx + c_6 \int_0^{\delta} f(x,\varepsilon)dx + c_6 g^{\alpha}(\varepsilon)$ bulunur. □

3. NEGATİF ÖZDEĞERLERİN TOPLAMI İÇİN ASİMTOTİK FORMÜL

Bu kısımda Teorem 1 ve Teorem 2 den yararlanarak $\varepsilon \to +0$ iken $\sum_{-\lambda_j < -\varepsilon} \lambda_j$ toplamı için asimtotik formül bulunacaktır. $q(x)$ fonksiyonunun aşağıdaki koşulu sağladığını varsayalım:
d) Her $\eta \in (0,\infty)$ sayısı için

$$\lim_{x\to\infty} q(x)x^{k-\eta} = \lim_{x\to\infty} \left\{q(x)x^{k+\eta}\right\}^{-1} = 0$$

dır. Burada k, $\left(0,\frac{2}{3}\right)$ aralığına ait olan sabit bir sayıdır.

Teorem 3: $p(x)$ ve $q(x)$ fonksiyonlarının 1),2) ve 3) koşullarını sağladığını varsayalım. Ek olarak $q(x)$ fonksiyonu d) koşulunu sağlasın. Bu durumda $\varepsilon \to +0$ iken

$$\sum_{-\lambda_j < -\varepsilon} \lambda_j = (3\pi)^{-1}\left[1 + o(\varepsilon^{t_0})\right] \int_{q(x)\ge\varepsilon} \left[2q(x) + \varepsilon\right]\sqrt{\frac{q(x)-\varepsilon}{p(x)}}dx$$

asimtotik formülü sağlanır. Burada $t_0 \in (0,\infty)$ bir sabittir.

İspat: Teorem 1 gereğince ε nun küçük pozitif değerleri için

$$\sum_{-\lambda_j < -\varepsilon} \lambda_j > \int_0^{g(\varepsilon)} f(x,\varepsilon)dx - \int_0^{\delta} f(x,\varepsilon)dx - c\, g^{\alpha}(\varepsilon) \tag{27}$$

dır. Teoremi ispatlamak için bu eşitsizliğin sağ tarafındaki terimleri ayrı ayrı sınırlandıralım $q(x)$ fonksiyonu monoton azalan olduğundan $[0, g(2\varepsilon)]$ aralığında $q(x) \ge q(g(2\varepsilon)) = 2\varepsilon$ dır. Bu nedenle

$$\int_0^{g(\varepsilon)} f(x,\varepsilon)dx > \frac{1}{3\pi}\int_0^{g(2\varepsilon)} [2q(x)+\varepsilon]\sqrt{\frac{q(x)-\varepsilon}{p(x)}}\,dx > \pi^{-1}\varepsilon\int_0^{g(2\varepsilon)} \sqrt{\frac{q(x)-\varepsilon}{p(x)}}dx > \varepsilon^{3/2}\int_0^{g(2\varepsilon)}\sqrt{\frac{1}{p(x)}}\,dx$$

dır. $p(x) < c_2$ olduğundan buradan

$$\int_0^{g(\varepsilon)} f(x,\varepsilon)dx > \sqrt{c_2^{-1}}\,\varepsilon^{3/2} g(2\varepsilon) \tag{28}$$

elde edilir. $q(x)$ fonksiyonu d) koşulunu sağladığından

$$\lim_{x\to\infty} q(x) = 0 \tag{29}$$

ve her $\eta > 0$ için

$$\lim_{x\to 0} q(x)x^{k+\eta} = \infty \tag{30}$$

dır. (29) den

$$\lim_{\varepsilon\to 0} g(\varepsilon) = \infty \tag{31}$$

bulunur. (30) ve (31) den $\lim_{\varepsilon\to 0} q\big(g(2\varepsilon)\big)[g(2\varepsilon)]^{k+\eta} = \infty$ elde edilir. Buradan ε nun η ya bağlı olan küçük değerleri için

$2\varepsilon[g(2\varepsilon)]^{k+\eta} > 2$ ya da

$$g(2\varepsilon) > \varepsilon^{-\frac{1}{k+\eta}} \tag{32}$$

bulunur. (28) ve (32) den

$$\int_0^{g(\varepsilon)} f(x,\varepsilon)dx > \sqrt{c_2^{-1}}\,\varepsilon^{\frac{3}{2}-\frac{1}{k+\eta}} \tag{33}$$

elde edilir. (27) eşitsizliğinin ikinci tarafındaki $\int_0^{\delta} f(x,\varepsilon)dx$ integralini sınırlandıralım. $q(x)$ fonksiyonu $(0,\infty)$ aralığında d) koşulunu sağladığından

$$q(x) \le f_1(\eta)x^{\eta-k} \qquad (0<\eta<k) \tag{34}$$

olacak şekilde pozitif değerli bir $f_1(\eta)$ fonksiyonu vardır. Öte yandan $p(x) \ge c_1$ $(c_1 > 0)$ olduğundan

$$\int_0^{\delta} f(x,\varepsilon)dx = \frac{1}{3\pi}\int_0^{\delta}[2q(x)+\varepsilon]\sqrt{\frac{q(x)-\varepsilon}{p(x)}}\,dx$$

$$< \frac{1}{\pi}\int_0^{\delta}\frac{q^{3/2}(x)}{\sqrt{p(x)}}dx < \int_0^{1}\frac{q^{3/2}(x)}{\sqrt{p(x)}}\,dx + \int_1^{\delta}\frac{q^{3/2}(x)}{\sqrt{p(x)}}\,dx$$

$$< c_7 + f_2(\eta)\int_1^{\delta} x^{\frac{3(\eta-k)}{2}}dx < c_7 + f_2(\eta)\ \delta^{\frac{3(\eta-k)}{2}+1} \tag{35}$$

dır. (2) eşitliğinden ε nun küçük değerleri için

$$\delta < [g(\varepsilon)]^{1-\alpha} \tag{36}$$

bulunur. (34) da x yerine $g(\varepsilon)$ yazılırsa

$q(g(\varepsilon)) \le f_1(\eta)[g(\varepsilon)]^{\eta-k}$ ya da

$$g(\varepsilon) \le [f_1(\eta)]^{\frac{1}{k-\eta}}\ \varepsilon^{-\frac{1}{k-\eta}} \tag{37}$$

elde edilir. (35), (36) ve (37) den

$$\int_0^{\delta} f(x,\varepsilon)dx < f_3(\eta)\ \varepsilon^{-\frac{(1-\alpha)[3(\eta-k)+2]}{2(k-\eta)}} \tag{38}$$

bulunur. Burada $f_3(\eta)$ $(0<\eta<k)$, η ya bağlı ve değerleri $(0,\infty)$ aralığına ait olan bir fonklsiyondur. (37) den

$$g^{\varepsilon}(\varepsilon) \le [f_1(\eta)]^{\frac{\alpha}{k-\eta}}\ \varepsilon^{-\frac{\alpha}{k-\eta}} \tag{39}$$

elde edilir. (33), (38) ve (39) den

$$\frac{\int_0^{\delta} f(x,\varepsilon)dx}{\int_0^{g(\varepsilon)} f(x,\varepsilon)dx} < f_4(\eta)\varepsilon^{-\frac{(1-\alpha)[3(\eta-k)+2]}{2(k-\eta)}-\frac{3}{2}+\frac{1}{k+\eta}} \tag{40}$$

$$\frac{g^{\alpha}(\varepsilon)}{\int_0^{g(\varepsilon)} f(x,\varepsilon)dx} < f_4(\eta)\ \varepsilon^{-\frac{\alpha}{k-\eta}-\frac{3}{2}+\frac{1}{k+\eta}} \tag{41}$$

bulunur. $k \ne 0$ olduğundan

$$-\frac{(1-\alpha)(3(\eta-k)+2)}{2(k-\eta)}-\frac{3}{2}+\frac{1}{k+\eta} \quad \text{ve} \quad -\frac{\alpha}{k-\eta}-\frac{3}{2}+\frac{1}{k+\eta}$$ fonksiyonları η ya göre

$\eta = 0$ noktasında süreklidirler. Dolayısıyla her $t>0$ için öyle bir $\eta=\eta(t)>0$ vardır ki

$$-\frac{(1-\alpha)(3(\eta-k)+2)}{2(k-\eta)}-\frac{3}{2}+\frac{1}{k+\eta} > \frac{\alpha(2-3k)}{2k}-t \tag{42}$$

ve

$$-\frac{\alpha}{k-\eta}-\frac{3}{2}+\frac{1}{k+\eta} > \frac{2-3k-2\alpha}{2k}-t \tag{43}$$

dır. Buraya kadar yapılan işlemlerde α , $(0,1)$ aralığına ait olan bir sabit sayıdır. Burada

$$\alpha = \frac{2-3k}{4}, \qquad t = t_0 = \min\left\{\frac{(2-3k)^2}{16k}, \frac{2-3k}{8k}\right\}$$ alınırsa (42) ve (43) dan

$$-\frac{(1-\alpha)[3(\eta-k)+2]}{2(k-\eta)} - \frac{3}{2} + \frac{1}{k+\eta} > \frac{(2-3k)^2}{8k} - t$$

$$\geq \frac{(2-3k)^2}{8k} - \frac{(2-3k)^2}{16k} = \frac{(2-3k)^2}{16k} \geq t_0 \tag{44}$$

$$-\frac{\alpha}{k-\eta} - \frac{3}{2} + \frac{1}{k+\eta} > \frac{2-3}{4k} - t_0 \geq \frac{2-3}{4k} - \frac{2-3}{8k} = \frac{2-3}{8k} \geq t_0 \tag{45}$$

elde edilir. (40), (41), (44) ve (45) den

$$\frac{\int_0^{\delta} f(x,\varepsilon)dx}{\int_0^{g(\varepsilon)} f(x,\varepsilon)dx} < c_8 \varepsilon^{t_0} \tag{46}$$

$$\frac{g^{\alpha}(\varepsilon)}{\int_0^{g(\varepsilon)} f(x,\varepsilon)dx} < c_8\ \varepsilon^{t_0} \tag{47}$$

bulunur. Burada $c_8 = f_4(\eta(t_0)) \in (0,\infty)$ bir sabittir. (27), (46) ve (47) eşitsizliklerinden

$$\frac{\sum_{-\lambda_j < -\varepsilon} \lambda_j}{\int_0^{g(\varepsilon)} f(x,\varepsilon)dx} > 1 - c_9 \varepsilon^{t_0} \qquad (c_9 \in (0,\infty)) \tag{48}$$

elde edilir. Teorem 2 den ve (46), (47) eşitsizliklerinden

$$\frac{\sum_{-\lambda_j < -\varepsilon} \lambda_j}{\int_0^{g(\varepsilon)} f(x,\varepsilon)dx} < 1 + c_{10} \varepsilon^{t_0} \tag{49}$$

bulunur. (48) ve (49) dan $\varepsilon \to +0$ iken

$$\frac{\sum\limits_{-\lambda_j<-\varepsilon}\lambda_j}{\int\limits_0^{g(\varepsilon)} f(x,\varepsilon)dx}-1=o(\varepsilon^{t_0}) \qquad \text{ya da}$$

$$\sum_{-\lambda_j<-\varepsilon}\lambda_j=(3\pi)^{-1}\left[1+o(\varepsilon^{t_0})\right]\int\limits_{q(x)\geq\varepsilon}\left[2q(x)+\varepsilon\right]\sqrt{\frac{q(x)-\varepsilon}{p(x)}}dx$$

asimtotik formülü elde edilir.

KAYNAKLAR

[1] Naimark M.A "Linear differential operators", part I,II, London, 1968.

[2] Skaçek B.Y. "Bir boyutlu diferansiyel operatörlerin spektrumunun negatif kısmının asimptodu", Pribl. Metod reseniya differens, unavneniy, Kiev, 1963.

[3] Maksudov F.G., Bayramoğlu M., Adıgüzelov E.,"On asymptotics of spectrum and trace of high order differantial operator with operator coefficients", Doğa-Turkish journal of Mathematics, vol.17, n.2, 1993.

[4] Ehliman Adıgüzelov, Zerrin Oer, "Yarı eksende verilmiş Sturm-Lioville operatörünün negatif özdeğerlerinin toplamının asimtotik ifadesi", YTÜD, Vol 1,26-35, 2000.

[5] Smirnov, V.I., A course of Higher Mathematics, vol.5, 602, New York Pergamon Press 1964.

[6] Courant R. And Hilbert D. "Methods of Mathemetical Physics" vol.1, 441, New York, 1970.