σ Journal of Engineering and Natural Sciences
Mühendislik ve Fen Bilimleri Dergisi

Sigma
2005/4

ON THE TRACE FORMULA OF SECOND ORDER DIFFERENTIAL EQUATION GIVEN WITH NON SEPERABLE BOUNDARY CONDITIONS

Azad BAYRAMOV, Serpil ÖZTÜRK USLU, Seda KIZILBUDAK ÇALIŞKAN*

Yıldız Teknik Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü, Davutpaşa-İSTANBUL

Geliş/Received: 24.05.2005 Kabul/Accepted: 03.10.2005

ABSTRACT

In this study we obtained the formula of the regularized trace of the self adjoint operator which is formed by a second order differentiasl equation and non seperable boundary conditions.
Keywords: Eigenvalue, Ortonormal eigenfunction, Asymptotic behaviour, Regularized trace.
MSC number/numarası: 34L05, 47A10.

AYRILABİLİR OLMAYAN SINIR KOŞULLARI İLE VERİLMİŞ İKİNCİ MERTEBEDEN DİFERANSİYEL DENKLEMİN İZ FORMÜLÜ ÜZERİNE

ÖZET

Bu çalışmada ayrılabilir olmayan sınır koşulları ile verilmiş ikinci mertebeden diferansiyel denklem ile oluşturulan kendine eş bir operatörün düzenli izi için formül elde edilmiştir.
Anahtar Sözcükler: Özdeğer, Ortonormal özfonksiyon, Asimtotik davranış, Düzenli iz.

1. GİRİŞ

$$\ell y = -y'' + p(x)y \tag{1}$$

ve

$$\ell_0 y = -y''$$

diferansiyel ifadeleri ve aynı

$$\begin{aligned} y(0) &= y(\pi) \\ y'(0) &= y'(\pi) \end{aligned} \tag{2}$$

sınır koşulları ile oluşturulmuş kendine eş operatörleri sırasıyla L ve L_0 ile gösterelim.

L_0 operatörünün spektrumu $\{4n^2\}_{n=0}^{\infty}$ kümesidir. Bu kümenin sıfır hariç her noktası katlılığı iki olan bir özdeğerdir. Sıfırın katlılığı ise birdir.

L_0 operatörünün özdeğerlerini $\{\mu_k\}$ ile gösterirsek; o zaman

* Sorumlu Yazar/Corresponding Autor: e-posta: skizilb@yildiz.edu.tr, tel: (0212) 449 15 32

$$\mu_0 = 0 \quad \text{ve} \quad \mu_k = \begin{cases} (k+1)^2 & ; \ k \ \text{tek ise} \\ k^2 & ; \ k \ \text{çift ise} \end{cases} \quad (k = 1,2,\cdots)$$

şeklinde ifade edilir.

Bu özdeğerlere karşılık gelen ortonormal özfonksiyonlar ise ,

$$\psi_0 = \frac{1}{\sqrt{\pi}}, \ \psi_1 = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin 2x, \ \psi_2 = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\cos 2x, \ \cdots$$

dir.

L operatörünün özdeğerelerini $\lambda_0 \le \lambda_1 \le \lambda_2 \le \cdots \le \lambda_n \le \cdots$ ile bu özdeğerelere karşılık gelen ortonormal özfonksiyonlar ise $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_n, \cdots$ ile gösterelim.

(1) diferansiyel ifadesi ve ayrılmış sınır koşulları altında oluşturulan operatörün düzenli iz formülü ilk olarak Gelfand -Levitan [1] tarafından bulunmuştur. Daha sonra aynı problem için düzenli iz formülü Dikiy [2] tarafından başka yöntemle elde edilmiştir. Düzenli iz formüllerine ait [3] –[18] çalışmaları gösterilebilir.

Bu çalışmada biz Dikiy nin metodunu kullanarak (1) diferansiyel ifadesi ve (2) periyodik sınır koşulları ile oluşturulan L operatörünün düzenli izi için, yani

$$\sum_{n=0}^{\infty}(\lambda_n - \mu_n)$$

serisi için bir formül elde edeceğiz.

2. ÖZDEĞER VE ÖZFONKSİYONLARA AİT BAZI SINIRLANDIRMALAR

Bu bölümde bize gerekecek olan

$$\lim_{N\to\infty}\sum_{n=0}^{N}\left[(\varphi_n, L\varphi_n) - (\psi_n, L\psi_n)\right] = 0 \tag{3}$$

formülünü ispatlayalım. Bunun için [2] ye benzer olarak ortonormal $\{\varphi_k\}$ bazından

$$\psi_k = \sum_{i=0}^{\infty} u_{ik}\,\varphi_i \qquad (k = 0,1,2,\cdots),$$

ortonormal bazına geçiş matrisi $(u_{ik})_{i,k=0}^{\infty}$ yi inceleyelim. Burada $u_{ik} = (\varphi_i, \psi_k)$ dır. (u_{ik}) uniter matristir yani

$$\sum_{i=0}^{\infty} u_{ik}^2 = 1, \quad (k = 0,1,2,\cdots)$$

dir.

Önce u_{ik} lar için bazı değerlendirmeler verelim.

$$L\psi_k = \mu_k\psi_k + p\psi_k \tag{4}$$

olduğu açıktır. Buradan

$$(L\psi_k, \varphi_i) = (\mu_k\psi_k, \varphi_i) + (p\psi_k, \varphi_i)$$

ya da

$$\lambda_i(\psi_k, \varphi_i) = \mu_k(\psi_k, \varphi_i) + (p\psi_k, \varphi_i)$$

elde edilir. Böylece,

$$(\lambda_i - \mu_k)(\psi_k, \varphi_i) = (p\psi_k, \varphi_i)$$

olacaktır.

Bu son eşitliğin karesini alarak i ye göre 0 dan ∞ a kadar toplam alalım. Bu takdirde

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{\infty} (\lambda_i - \mu_k)^2 (\psi_k, \varphi_i)^2 = \sum_{i=0}^{\infty} (p\psi_k, \varphi_i)^2 = \|p\psi_k\|^2 &= \int_0^{\pi} [p(x)\psi_k(x)]^2 dx \\ &\le p_0^2 \int_0^{\pi} \psi_k^2(x) dx \\ &= p_0^2 \end{aligned} \tag{5}$$

olur. Burada $p_0 = \max\limits_{0 \le x \le \pi} |p(x)|$ dir. $p(x)$ in aşağıdaki şartları sağladığını varsayalım:

1) $p(x)$ fonksiyonu, L operatörünün özdeğerlerinin asimtotik ifadesinin $\lambda_k = \mu_k + O\left(\frac{1}{k}\right)$ şeklinde olmasını sağlar,

2) $p(x)$ fonksiyonu, $\int_0^{\pi} p(x) dx = 0$ eşitliğini sağlar.

Bu şartları aşağıdaki sınırlandırmalarda gözönüne alacağız. (5) e göre, her doğal N sayısı için

$$\sum_{i=N+1}^{\infty} (\lambda_i - \mu_k)^2 u_{ik}^2 < C \qquad (C = \text{const.})^{*)} \qquad (k < N)$$

dir. Buradan

---

*) Bu çalışmada C sabitleri farklı olabilir.

$$\sum_{i=N+1}^{\infty} (\lambda_i - \mu_k) u_{ik}^2 < C$$

olduğu çıkar. Böylece,

$$\sum_{i=N+1}^{\infty} (\lambda_i - \mu_k)(\lambda_i - \lambda_k) u_{ik}^2 < C$$

$$\sum_{i=N+1}^{\infty} (\lambda_i - \lambda_k)^2 u_{ik}^2 < C$$

olduğu açıktır.

$$\sum_{i=N+1}^{\infty} (\lambda_{N+1} - \mu_k)(\lambda_i - \lambda_k) u_{ik}^2 \le \sum_{i=N+1}^{\infty} (\lambda_i - \mu_k)(\lambda_i - \lambda_k) u_{ik}^2 \le C$$

dir. Buradan $k < N$ için

$$\sum_{i=N+1}^{\infty} (\lambda_i - \lambda_k) u_{ik}^2 \le \frac{C}{\lambda_{N+1} - \mu_k} \tag{6}$$

elde edilir.

Şimdi (3) ü ispatlayalım.

$$\left(\psi_k, L\psi_k\right) = \left(\sum_{i=0}^{\infty} u_{ik}\varphi_i, \sum_{i=0}^{\infty} \lambda_i u_{ik}\varphi_i\right) = \sum_{i=0}^{\infty} \lambda_i u_{ik}^2 \,.$$

olduğundan

$$\sum_{k=0}^{N} \left(\psi_k, L\psi_k\right) = \sum_{k=0}^{N} \sum_{i=0}^{\infty} \lambda_i u_{ik}^2$$

olur.

(3) deki birinci toplamı hesaplayalım. $\sum\limits_{i=0}^{\infty} u_{ki}^2 = 1$ olduğunu gözönüne alınırsa

$$\sum_{k=0}^{N} \left(\varphi_k, L\varphi_k\right) = \sum_{k=0}^{N} \lambda_k = \sum_{k=0}^{N} \sum_{i=0}^{\infty} \lambda_k u_{ki}^2$$

elde edilir. Böylece,

$$\lim_{N\to\infty} \left(\sum_{k=0}^{N} \sum_{i=0}^{\infty} \lambda_i u_{ik}^2 - \sum_{k=0}^{N} \sum_{i=0}^{\infty} \lambda_k u_{ki}^2 \right) = 0 \tag{7}$$

olduğunu ispatlamamız gerekir.

$$\sum_{k=0}^{N} \sum_{i=0}^{\infty} \lambda_i u_{ik}^2 - \sum_{k=0}^{N} \sum_{i=0}^{\infty} \lambda_k u_{ki}^2 = \sum_{k=0}^{N} \sum_{i=N+1}^{\infty} \left(\lambda_i - \lambda_k\right) u_{ik}^2 + \sum_{k=0}^{N} \sum_{i=N+1}^{\infty} \lambda_k \left(u_{ik}^2 - u_{ki}^2\right) \tag{8}$$

olduğu açıktır.

(8) in sağ tarafındaki birinci toplamı hesaplayalım.

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{N} \sum_{i=N+1}^{\infty} \left(\lambda_i - \lambda_k\right) u_{ik}^2 &= \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{i=N+1}^{\infty} \left(\lambda_i - \lambda_k\right) u_{ik}^2 + \sum_{i=N+1}^{\infty} \left(\lambda_i - \lambda_N\right) u_{iN}^2 \\ &= \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{i=N+1}^{\infty} \left(\lambda_i - \lambda_k\right) u_{ik}^2 + \left(\lambda_{N+1} - \lambda_N\right) u_{(N+1)N}^2 + \sum_{i=N+2}^{\infty} \left(\lambda_i - \lambda_N\right) u_{iN}^2 \end{aligned} \tag{9}$$

$(N+1)$ çift sayı olmak üzere (6) dan yararlanarak $\sum\limits_{k=0}^{N-1} \sum\limits_{i=N+1}^{\infty} \left(\lambda_i - \lambda_k\right) u_{ik}^2$ terimini sınırlandıralım:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{i=N+1}^{\infty} \left(\lambda_i - \lambda_k\right) u_{ik}^2 &< \sum_{k=0}^{N-1} \frac{C}{(N+1)^2 - (k+1)^2} = \sum_{k=1}^{N} \frac{C}{(N+1)^2 - k^2} \\ &\le \frac{1}{(N+1)^2 - N^2} + \int_1^N \frac{dx}{(N+1)^2 - x^2} \\ &= \frac{1}{2N+1} + \frac{1}{N+1} \int_{\frac{1}{N+1}}^{\frac{N}{N+1}} \frac{du}{1-u^2} \\ &\sim \frac{1}{2} \frac{\ln N}{N} \to 0 \qquad (N \to \infty)\,. \end{aligned} \tag{10}$$

Yine $(N+1)$ çift sayı olmak üzere (6) dan yararlanarak $\sum\limits_{i=N+2}^{\infty} \left(\lambda_i - \lambda_N\right) u_{iN}^2$ için

$$\sum_{i=N+2}^{\infty}(\lambda_i-\lambda_N)u_{iN}^2<\frac{C}{(N+3)^2-(N+1)^2}=\frac{C}{5N+8}\to 0 \qquad (N\to\infty) \tag{11}$$

bulunur. Son olarak ta yine $(N+1)$ çift sayı olmak üzere $(\lambda_{N+1}-\lambda_N)u_{N+1N}^2$ terimini sınırlandırırsak;

$$(\lambda_{N+1}-\lambda_N)u_{N+1N}^2\le\lambda_{N+1}-\lambda_N=(N+1)^2-(N+1)^2+O\left(\frac{1}{N+1}\right)-O\left(\frac{1}{N}\right)\to 0 \quad (N\to\infty) \tag{12}$$

olacaktır. Böylece $(N+1)$ in çift sayı olması durumunda (9), (10), (11) ve (12) den

$$\lim_{N\to\infty}\sum_{k=0}^{N}\sum_{i=N+1}^{\infty}(\lambda_i-\lambda_k)u_{ik}^2=0 \tag{13}$$

elde edillir.

Benzer şekilde $(N+1)$ in tek sayı olması durumunda da (13) ispatlanabilir.

Şimdi ise $\lim\limits_{N\to\infty}\sum\limits_{k=0}^{N}\sum\limits_{i=0}^{\infty}\lambda_k u_{ki}^2=0$ olduğunu ispatlayalım.

$$u_{ik}+u_{ki}=(\varphi_i,\psi_k)+(\varphi_k,\psi_i)=-(\varphi_i-\psi_i,\varphi_k-\psi_k)$$

olduğu açıktır. L operatörünün özfonksiyonlarının asimtotik ifadesini gözönüne alırsak, buradan

$$|u_{ik}+u_{ki}|\le\|\varphi_i-\psi_i\|\,\|\varphi_k-\psi_k\|\le\frac{C}{ik} \tag{14}$$

elde ederiz.

$(N+1)$ çift sayı ve $k<N$ olmak üzere (6) dan ve Cauchy-Schwarz eşitsizliğinden yararlanarak aşağıdaki sınırlandırmalar yapılabilir:

$$\begin{aligned}\sum_{i=N+1}^{\infty}(\lambda_i-\mu_k)\left|u_{ik}^2-u_{ki}^2\right|&=\sum_{i=N+1}^{\infty}(\lambda_i-\mu_k)|u_{ik}-u_{ki}||u_{ik}+u_{ki}|\\&\le\sqrt{\sum_{i=N+1}^{\infty}|u_{ik}+u_{ki}|^2}\sqrt{\sum_{i=N+1}^{\infty}(\lambda_i-\mu_k)^2|u_{ik}-u_{ki}|^2}\\&<\frac{C}{k\sqrt{N+1}}\end{aligned}$$

Böylece buradan $k<N$ için

$$\sum_{i=N+1}^{\infty}\left|u_{ik}^2-u_{ki}^2\right|<\frac{C}{k\sqrt{N+1}(\lambda_{N+1}-\mu_k)}<\frac{C}{k\sqrt{N+1}[(N+1)^2-(k+1)^2]} \tag{15}$$

elde edillir. (8) eşitliğinin ikinci toplamının terimlerinin mutlak değerinden oluşan

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{N}\lambda_k\sum_{i=N+1}^{\infty}\left|u_{ik}^2-u_{ki}^2\right|&=\lambda_N\sum_{i=N+1}^{\infty}\left|u_{iN}^2-u_{Ni}^2\right|+\sum_{k=0}^{N-1}\lambda_k\sum_{i=N+1}^{\infty}\left|u_{ik}^2-u_{ki}^2\right|\\&=\lambda_N\left|u_{N+1N}^2-u_{NN+1}^2\right|+\lambda_N\sum_{i=N+2}^{\infty}\left|u_{iN}^2-u_{Ni}^2\right|+\sum_{k=0}^{N-1}\lambda_k\sum_{i=N+1}^{\infty}\left|u_{ik}^2-u_{ki}^2\right|\end{aligned} \tag{16}$$

ifadesini sınırlandıralım. $(N+1)$ çift sayı olmak üzere (14) eşitsizliğine göre (16) nın sağ tarafındaki birinci toplam için

$$\lambda_N \left| u_{N+1N}{}^2 - u_{NN+1}{}^2 \right| = \lambda_N \left| u_{N+1N} - u_{NN+1} \right| \left| u_{N+1N} + u_{NN+1} \right|$$

$$\leq C(N+1)^2 \frac{1}{(N+1)N} \left| u_{N+1N} + u_{NN+1} \right| \to 0 \qquad (N \to \infty)\,. \tag{17}$$

elde edilir.

Yine $(N+1)$ çift sayı olmak üzere, (15) den yararlanarak (16) nın ikinci toplam için

$$\lambda_N \sum_{i=N+2}^{\infty} \left| u_{iN}{}^2 - u_{Ni}{}^2 \right| < C \frac{(N+1)^2}{N\sqrt{N+2}\,(\lambda_{N+2} - \mu_N)}$$

$$< \frac{C(N+1)^2}{N\sqrt{N+2}\,[(N+3)^2 - (N+1)^2]} \to 0 \quad (N \to \infty) \tag{18}$$

bulunur.

Şimdi de yine (15) den yararlanarak (16) nın üçüncü toplamını değerlendirirsek;

$$\sum_{k=0}^{N-1} \lambda_k \sum_{i=N+1}^{\infty} \left| u_{ik}{}^2 - u_{ki}{}^2 \right| < C \sum_{k=0}^{N-1} \frac{(k+1)^2}{k\sqrt{N+1}\,[(N+1)^2 - (k+1)^2]}$$

$$= C \sum_{k=1}^{N} \frac{k^2}{(k-1)\sqrt{N+1}[(N+1)^2 - k^2]}$$

$$< C \sum_{k=1}^{N} \frac{k}{\sqrt{N+1}[(N+1)^2 - k^2]}$$

$$< C \frac{N+1}{\sqrt{N+1}} \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{(N+1)^2 - k^2} \sim C \frac{\ln N}{\sqrt{N}} \to 0 \quad (N \to \infty) \tag{19}$$

olur. Böylece $(N+1)$ çift sayı olmak üzere (16), (17), (18) ve (19) dan

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{k=0}^{N} \sum_{i=N+1}^{\infty} \lambda_k \left(u_{ik}{}^2 - u_{ki}{}^2 \right) = 0 \tag{20}$$

elde edilir. Benzer şekilde $(N+1)$ in tek sayı olması durumunda da bu eşitlik ispatlanabilir. (8), (13) ve (20) den (7) nin ve buradan da (3) ün ispatı elde edilir.

3. DÜZENLİ İZİN HESAPLANMASI

$(\varphi_n, L\varphi_n) = \lambda_n$ olduğu aşikardır. O halde

$$(\psi_n, L\psi_n) = \mu_n + (\psi_n, p\psi_n)$$

dir. Buradan (3) ifadesini gözönüne alırsak;

$$\sum_{n=0}^{N} \left[(\psi_n, L\psi_n) - (\varphi_n, L\varphi_n) \right] = \sum_{n=0}^{N} (\mu_n - \lambda_n) + \sum_{n=0}^{N} (\psi_n, p\psi_n) \to 0 \quad (N \to \infty) \tag{21}$$

olur.

Şimdi $\lim\limits_{N\to\infty} \sum\limits_{n=0}^{N} (\psi_n, p\psi_n)$ nin değerini hesaplayalım. N çift sayı olmak üzere $p(x)$ için ikinci şartı gözönüne alırsak;

$$\sum_{n=0}^{N}(\psi_n, p\psi_n) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} p(x)\,dx + \sum_{n=1}^{\frac{N}{2}}\left(\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} p(x)\sin^2 2nx\,dx + \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} p(x)\cos^2 2nx\,dx\right)$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} p(x)\,dx + \frac{N}{\pi}\int_0^{\pi} p(x)\,dx = 0 \tag{22}$$

elde edilir.

Benzer şekilde, N in tek sayı olması durumunda;

$$\sum_{n=0}^{N}(\psi_n, p\psi_n) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} p(x)\,dx + \sum_{n=1}^{\frac{N-1}{2}}\left(\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} p(x)\sin^2 2nx\,dx + \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} p(x)\cos^2 2nx\,dx\right)$$

$$+\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} p(x)\sin^2 Nx\,dx =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} p(x)\,dx + \frac{(N-1)}{\pi}\int_0^{\pi} p(x)\,dx + \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} p(x)\left(\frac{1-\cos 2Nx}{2}\right)dx$$

$$= -\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} p(x)\cos 2Nx\,dx \to 0 \qquad (N\to\infty) \tag{23}$$

elde edilir. Bulduğumuz (22) ve (23) ifadelerinden

$$\lim_{N\to\infty}\sum_{n=0}^{N}(\psi_n, p\psi_n) = 0$$

bulunur.

Sonuç olarak buradan ve (21) den

$$\lim_{N\to\infty}\sum_{n=0}^{N}(\lambda_n - \mu_n) = 0$$

olduğu görülür. Böylece aşağıdaki teorem ispatlanmış olur.

Teorem: Eğer $p(x)$ fonksiyonu 1) - 2) şartlarını sağlıyor ise o zaman

$$\sum_{n=0}^{\infty}(\lambda_n - \mu_n) = 0$$

dır.

KAYNAKLAR

[1] Gelfand, I. M. ve Levitan, B. M. , "İkinci mertebeden bir diferansiyel operatörün özdeğerleri için bir formül hakkında" Dokl. AN SSSR, 1953, T. 88, No:4, 593-596.

[2] Dikiy, L. A., "Gelfand-Levitan ın bir formülü hakkında", Uspeki Matem. Nauk, 1953, T. 8, No:2, 119-123.

[3] Gelfand, I. M., "İkinci mertebeden bir diferansiyel operatörün özdeğerleri için formüller", Uspeki Matem. Nauk, 1956, T. 11, 191-198.

[4] Dikiy, L. A., “Sturm-Liouville diferansiyel operatörleri için iz formülleri”, Uspeki Matem. Nauk, 1958, T. 13, No:3, 111-143.
[5] Halberg, C. J. and Kramer, V. A. , “Generalization of the trace concept”, Duke Mathematical Journal, 1960, V. 27, No:4, 607-618.
[6] Gasimov, M. G. ve Levitan, B. M. , “İki singular Sturm-Liouville operatörünün özdeğerlerinin farkalrının toplamı hakkında”, Dokl. AN SSSR, 1963, T.151, No. 5, 1014-1017.
[7] Sadovniçiy, V. A., “ Yüksek mertebeden iki diferansiyel operatörünün farkının izi hakkında”, Differens. Uravneniya, 1966, T. 2, No: 12, 1611-1624.
[8] Adıgüzelov, E.E. “Operatör katsayılı iki Sturm-Liouville operatörünün farkının izi hakkında”, İzv. AN SSSR, Seriya Fiz-Tekn. I Mat. Nauk, No: 5, 1976, 20-24.
[9] Maksudov, F. G., Bayramoğlu, M. and Adıgüzelov, E.E., “On a regularized trace of the Sturm-Liouville operator on a finite interval with the unbounded operator coefficient”, Dokl. AN SSSR, English translation Soviet Math., Dokl, 30(1984), No: 1, 169-173.
[10] Bayramoğlu, M., “Sınırsız operator katsayılı diferansiyel denklemin düzenli izi üzerine”, Spectral Theory and Its Applications, No: 7, Baku, 1987, 15-40.
[11] Gaşimov, I.F., “Singüler diferansiyel operator denklemlerin spektrumunun ve düzenli izinin incelenmesi”, Doktora Tezi, Bakü, 1990, 123 s.
[12] Dostanic, M. “Trace formula of Gelfand-Levitan type”, Publ. Inst. Math. (Beograd) (N. S.), 1994, V. 55, 51-65.
[13] Bayramoğlu, M. and Adıgüzelov, E.E., “On a regularized trace formula for the Sturm-Liouville operator with a bounded operator coefficient and with a singularity”, Differential Equations, 32 (1996), No: 12, 1581-1585, (1997).
[14] Albayrak, I., Bayramoğlu, M. and Adıgüzelov, E.E., “Formula for the second regularized trace of the Sturm-Liouville problem with a spectral parameter on boundary condition”, Methods of Functional analysis and topology, Volume 4, No: 3, 1-8, 1999.
[15] Albayrak, I., Baykal, O. and Gül, E. , “Formula for the highly regularized trace of the Sturm-Liouville operator with unbounded operator coefficients having singularity”, Turkish Journal of Math., V. 25, No: 2, 307-322, 2001.
[16] Adıgüzelov, E. E., Baykal, O. and Bayramov, A., “On the spectrum and regularized trace of the Sturm-Liouville problem with spectral parameter on the boundary condition and with the operator coefficient”, International Journal of Differential Equations and Applications, Volume 2, No: 3, 2001, 317-333.
[17] Bayramoğlu, M. and Şahintürk, H., “Sınır koşulunda spektral parametre olan Sturm-Liouville probleminin düzenli izi üzerine”, SIAM 50 th Anniversary and 2002 Annual Meeting, (8-12 Temmuz, 2002), Philadelphia, ABD, 2002.
[18] Albayrak, I., Akgün, F., “Sonlu aralıkta çift mertebeden bir diferansiyel denklemin düzenli izinin hesaplanması”, Sigma Journal of Engineering and Natural Sciences, 4/2004, 272-278.