



**PhD Research Article / Doktora Çalışması Araştırma Makalesi**  
 **$L_2$  CONTROL OF LINEAR SYSTEMS WITH SATURATING ACTUATORS**  
**VIA CONVEX OPTIMIZATION APPROACH**

**Ali Fazıl UYGUR\*<sup>1</sup>, Galip CANSEVER<sup>2</sup>**

<sup>1</sup>Yıldız Teknik Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Elektrik Mühendisliği Anabilim Dalı, Yıldız-İSTANBUL

<sup>2</sup>Yıldız Teknik Üniversitesi, Elektrik-Elektronik Fak., Kontrol ve Otomasyon Müh. Bölümü, Yıldız-İSTANBUL

**Received/Geliş: 18.02.2011 Accepted/Kabul: 27.05.2011**

---

**ABSTRACT**

Actuator saturation problem in the design of control systems is an important issue to be taken into account. In this study, design of  $L_2$  optimal controller for linear systems under actuator saturation is discussed. Controller is focused to minimizing the  $L_2$  gain of system's performance outputs. Performance specifications that have been taken into design problem and saturation bound on actuators are transformed to constraints which can be expressed in terms of linear matrix inequalities, and the related controller is obtained via solving convex optimization problems over those constraints. Performance of the designed controller is tested via simulation studies for quarter car suspension model.

**Keywords:** Actuator saturation, linear matrix inequalities, suspension systems.

**DIŞBÜKEY OPTİMİZASYON YAKLAŞIMIYLA DOYUMLU EYLEYİCİLERE SAHİP LİNEER SİSTEMLERİN  $L_2$  KONTROLÜ**

**ÖZET**

Kontrol sistemlerinin tasarımında karşılaşılan eyleyici doyumu problemi dikkate alınması gereken önemli bir konudur. Bu çalışmada eyleyici doyumuna maruz kaldığı düşünülen lineer sistemler için  $L_2$  optimal kontrolcü tasarımı ele alınmıştır. Söz konusu kontrolcü sistemin performans çıkışlarına dair  $L_2$  kazancının minimize edilmesine odaklanmıştır. Tasarım probleminin ele aldığı performans gerekleri ve eyleyiciler üzerindeki lineer olmayan doyum sınırlaması, lineer matris eşitsizlikleri cinsinden ifade edilen kısıtlara dönüştürülmüş ve ilgili kontrolcü söz konusu kısıtlara dayalı dışbükey optimizasyon probleminin çözülmesi yoluyla elde edilmiştir. Tasarlanan kontrolcünün gösterdiği performans ise, çeyrek taşıt süspansiyon modeli üzerindeki benzetim çalışmalarıyla sınanmıştır.

**Anahtar Sözcükler:** Eyleyici doyumu, lineer matris eşitsizlikleri, süspansiyon sistemleri.

---

**1. GİRİŞ**

Kontrol sistemleri içerisinde yer alan eyleyicilerin üretmiş oldukları kontrol işaretlerinin, genlik değişimleri ve genlik değişim hızları üzerinde, gerçekte bir sınırlılık durumu söz konusudur. Bazen de sistemden kaynaklanan yapısal zorunluluklardan ötürü, uygulanacak kontrol işaretinin sınırlandırılması gerekliliği ortaya çıkmaktadır. Eğer kontrolcü tasarım aşamasında, eyleyiciler için söz konusu bu sınırlar dikkate alınmayacak olursa, kapalı çevrim sistem performansı üzerinde

---

\* Corresponding Author/Sorumlu Yazar: e-mail/e-ileti: fuygur@yildiz.edu.tr, tel: (505) 773 30 15

kayıplar oluşabilmekte ve istenmeyen geçici durum cevapları görülebilmektedir. Bunun da ötesinde ciddi zararlar doğuran arıza durumları meydana gelebilmektedir. Bu sebeple, ister lineer, isterse lineer olmayan kontrol tasarım teknikleri açısından bakılsın, eyleyici doyum meselesi kontrol sistemlerinin tasarımında dikkate alınması gereken önemli bir konudur. Üzerine etkiyen bozucular karşısında, eyleyici doyumuna maruz kapalı çevrim bir sistemden beklenenler; sistem kararlılığının sağlanması ve bozucu bastırma performansının iyileştirilmesidir. Sistemin bozucu bastırma kabiliyeti, sistem çıkışı ile bozucunun  $L_2$  normları arasındaki en büyük oran olan  $L_2$  kazancıyla ölçülebilir. Bu sebeple bozucuların bastırılması, kapalı çevrim sistemin ilgilenilen performansları ifade eden çıkışları için, bozucu girişlerden ilgili çıkışlara olan  $L_2$  kazancının ya da  $L_2$  normunun minimize edilmesi ile aynı anlamdadır. Eyleyici doyumuna maruz lineer sistemlerin  $L_2$  kazancı anlamında analiz ve tasarımına dair literatürde çok sayıda çalışma mevcuttur[1-6].

$L_2$  kazancı anlamında bozucu bastırma yetisinin bir diğer ölçüsü de, nihayetinde kapalı çevrim sistem yörüngelerinin içine hapsediği küme ile sistemin ilk koşullarını ihtiva eden kümenin, göreceli büyüklüklerinin mukayesesidir. Yörüngeleri kuşatacak ya da ilk koşulları içeren nesne, pekâlâ bir elipsoid olarak düşünülebilir. Bunun sebebi, elipsoidlerin analitik ifadelerinin kuadratik formda olması ve sistem yörüngeleri için kuadratik Lyapunov fonksiyonları açısından bakıldığında, enerji düzey kümelerine karşılık gelmeleridir. Dolayısıyla sistemin bozucuları bastırmadaki yeteneği, sistem yörüngelerini kuşatan elipsoidin, başlangıç koşullarını içeren elipsoide olan yakınlığı ile doğru orantılıdır.

Bozucu bastırma noktasında, eyleyici doyum sebebiyle kontrol işareti üzerinde meydana gelen sınırlılık, kontrolcü tasarımında lineer olmayan bir durum teşkil etmektedir. Özellikle lineer kontrol teknikleri kullanılarak gerçekleştirilen kontrolcü tasarımlarında, lineer olmayan doyum olgusunun, tasarımda ne şekilde ele alınacağı önemli bir problemdir. Bu problemin çözümünde dikkat çeken yaklaşımlardan biri de, lineer olmayan  $satF(x)$  gibi doyumlu bir geri beslemeyle üretilen kontrol işaretinin, bir dizi lineer geri besleme tarafından şekillendirilen dışbükey bir kabuk içerisine yerleştirilmesi esasına dayanmaktadır. Bu yaklaşımla Lineer olmayan doyum ifadesi, lineer yöntemlerle ele alınabilmekte ve dışbükey optimizasyon problemine dönüştürülebilen  $L_2$  kontrolcü tasarımı için lineer matris eşitsizliklerine LME dayalı bir kısıt teşkil etmektedir. Böylelikle eyleyici doyum olgusu, dışbükey bakış açısıyla tasarıma dahil edilmiş olmaktadır. Ayrıca bahsi geçen elipsoidler üzerinde ortaya çıkan kısıtlar da yine optimizasyon problemin LME' ler cinsinden ifade edilebilen diğer kısıtlarını oluştururlar.

Dolayısıyla bu çalışmada esas olarak, eyleyici doyum altındaki sistemler için, LME' lere dayalı dışbükey optimizasyon tabanlı  $L_2$  kontrolcü tasarımı ele alınmıştır. Bu maksatla 2. Bölümde bir dışbükey optimizasyon aracı olarak lineer matris eşitsizliklerinden bahsedilmiş, 3. Bölümde ise doyumlu eyleyicilere sahip lineer sistemlerin  $L_2$  kontrolü ele alınmıştır. Son olarak 4. Bölümde bahse konu kontrolün performansı çeyrek taşıt süspansiyonu üzerindeki farklı kontrol gereksinimleri için benzetim çalışmaları yapılmak suretiyle test edilmiştir.

## **2. DIŞBÜKEY KISITLAR OLARAK LİNEER MATRİS EŞİTSİZLİKLERİNİN ÖNEMİ**

Lineer matris eşitsizlikleri (LME), sistem ve kontrol teorisinde çok yaygın biçimde kullanılmışlardır. LME' ler ilk olarak Lyapunov' un çalışmalarında karşımıza çıkar. 1892 de yapmış olduğu çalışmada Lyapunov göstermiştir ki;  $\dot{x} = Ax$  formundaki diferansiyel bir denklemin asimptotik kararlılığı,  $P$  pozitif tanımlı bir matris olmak üzere;  $A^T P + P A > 0$  biçimindeki bir matris eşitsizliği ile ortaya konabilir.

Lineer bir matris eşitsizliği dışbükey bir kısıt ifade eder. Bu sebeple dışbükey amaç fonksiyonlarına sahip optimizasyon problemleri ve LME kısıtlar bazı hazır yazılımlar yardımıyla etkin bir biçimde kolaylıkla çözülebilmektedir. Lineer eşitsizlikler, dışbükey kuadratik eşitsizlikler, matris norm eşitsizlikleri ve kontrol teorisinden kaynaklanan Lyapunov ve Riccati eşitsizlikleri gibi birtakım eşitsizliklerin tümü LME' ler şeklinde yazılabilmektedirler.

Ayrıca çok sayıda LME söz konusu olduğunda bunların hepsini daha büyük boyutlu tek bir LME olarak yazmak ta mümkün olmaktadır. Bu durum LME' leri çok çeşitli optimizasyon ve kontrol problemlerinin çözümüne yönelik faydalı bir araç haline getirmiştir.

Genel olarak bir LME' nin ifadesi aşağıda, denklem (1)'te gösterilen formdadır.

$$F(x) = F_0 + \sum_{i=1}^m x_i F_i > 0 \quad (1)$$

Burada  $x \in \mathcal{R}^m$ ,  $F_i \in \mathcal{R}^{n \times n}$  şeklindedir.

Eşitsizlik,  $F(x)$  in pozitif tanımlı bir matris olduğu anlamına gelmektedir, şöyle ki  $F(x)$  matrisi;

$$z^T F(x) z > 0, \quad \forall z \neq 0, \quad z \in \mathcal{R}^n \quad (2)$$

olacak şekilde, denklem (2)'deki quadratik ifadeyi pozitif yapar. Simetrik " $F_i$ "  $i = 0, 1, \dots, m$  matrisleri sabit olup  $x$  değişkendir. Bu ise,  $F(x)$  in  $x$  elemanlarının afin bir fonksiyonu olduğunu gösterir. Denklem (1) kesin pozitif tanımlı bir LME'yi göstermektedir.  $F(x)$ 'in yarı pozitif tanımlı olması durumu kesin olmayan bir LME olarak ifade edilir. Eğer  $\{x \mid F(x) > 0\}$  kümesi boş değil ise, kesin pozitif tanımlı bir LME' nin feasible (gerçeklenebilir) olduğu söylenir [7].

Sistem ve kontrol teorisi içerisinde yer alan ve analitik olarak çözülemeyen çoğu LME problemi sayısal olarak ele alınmış ve Interior-Points algoritması yoluyla çözülmüştür [8]. LME' lere dayalı dışbükey optimizasyon yoluyla ele alınan kontrol sistemlerine ait çeşitli problemler, Interior-Points algoritmaları yoluyla kolaylıkla çözülebilmektedirler. Polynomial time dışbükey LME problemleri için bu algoritmaların etkinliği sayısal çalışmalar yoluyla ortaya konulmuştur. Bu algoritma aynı zamanda izdüşümsel olarak ta bilinmektedir. İlk olarak ticari bir yazılım olan MATLAB' in LME araç kutusu içinde gerçekleştirilmiştir [9]. Sturm tarafından geliştirilmiş olan diğer bir çözücü de SeDuMi'dir[10]. Hem Interior-Points algoritması, hem de SeDuMi, 2004 yılında Lofberg tarafından geliştirilmiş olan ve LME' lerin MATLAB içerisinde uygun formda yazılmalarına imkân tanıyan ve YALMIP olarak adlandırılan ayrıştırıcı yazılımla uyumlu çalışabilmektedirler [11].

### 3. EYLEYİCİ DOYUMLU SİSTEMLERİN $L_2$ KONTROLÜ

Doyumlu eyleyicilere sahip lineer sistemler için  $x(0) \neq 0$  şeklinde sıfırdan farklı başlangıç koşulları altında,  $\mathcal{W}_\alpha := \{w: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^q: \int_0^\infty w^T(t)w(t)dt \leq \alpha\}$  olarak tanımlı,  $\mathcal{W}_\alpha$  kümesinden seçilen bozuculara mukabil,  $u(t) = Fx(t)$  gibi durum geri beslemeli bir kontrolcüden beklenenleri, kapalı çevrim sistemi  $L_2$  anlamında kararlı kılmak ve bozuculardan sistem çıkışına olan  $L_2$  kazancının en az olmasını sağlamak, olarak sıralamak mümkündür.  $L_2$  kontrolü amaçlanan eyleyici doyumlu sistemin durum uzayındaki ifadesi, (3)'teki gibidir.

$$\dot{x} = Ax + B_u \text{sat}(u) + B_w w, \quad z = Cx + D_{zu} \text{sat}(u), \quad x(0) = x_0 \quad (3)$$

Burada  $x \in \mathbb{R}^n$ 'ler durumları,  $w \in \mathbb{R}^q$  bozucu girişi,  $\text{sat}(\cdot)$  ise birim düzeyli standart doyum fonksiyonunu ifade etmektedir. Bozucu bastırma performansı değerlendirilirken sınırlı enerjili  $L_2$  tipi bozucular göz önüne alınacaktır. Zira yeterince büyük bozucular karşısında sisteme dair durum ve çıkışlar, sınırlandırılmaz bir şekilde artış gösterebilirler ve bozucu bastırma bağlamında  $L_2$  kazancı anlamını yitirmiş olur. Sistemin bozucu bastırma yeteneğinin bir ölçüsü olarak, verilen  $\mathcal{W}_\alpha$  kümesi üzerinde tanımlı, sınırlandırılmış  $L_2$  kazancı ya da sistemin durum yörüngelerini kuşatan zarfın genişliği kullanılabilir. Yaklaşım olarak, bir elipsoid içerisinde başlayan sistem yörüngelerinin, yine bu elipsoidi kuşatan, dış bir elipsoid kabuk içerisinde kalmasını temin edecek bir koşulun belirlenmesi düşünülebilir. Verilen bir geri besleme kuralı çerçevesinde, kapalı çevrim sistemin kararlılığı ve bozucu bastırma yeteneği, söz konusu bu iki elipsoidin büyüklüğü arasındaki fark yardımıyla değerlendirilebilir. Bu çerçevede, sisteme ait

kararlılık ve bozucu bastırma problemleri, lineer matris eşitsizlikleri formunda kısıtlar ihtiva eden bir optimizasyon problemine dönüştürülebilmekte ve etkin sayısal algoritmalar yardımıyla kolaylıkla çözülebilmektedirler. Geri besleme kazancı ekstra bir bağımsız parametre olarak hesaba katılırsa optimizasyon problemi kolaylıkla bir kontrolcü tasarım problemine dönüşebilmektedir.

Eyleyici doyumlu sistemlerin sonlu  $L_2$  kazancı ile kararlılığına dair koşulları, Teorem1’de ispatıyla beraber ele almadan önce, konuyla ilgili bazı tanımlamaların ve söz konusu teoremin ispatında kullanılacak bir Yardımcı Teorem’ in sunulması oldukça faydalı olacaktır.

**Tanım1**

Durum uzayında elipsoid tanımlayan durumların kümesi,  $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$  pozitif tanımlı bir matris ve  $\rho$  pozitif bir reel sayı olmak kaydıyla,  $\mathcal{E}(P, \rho) = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid x^T P x \leq \rho \}$  tanımlanmasıyla verilebilir.

**Tanım2**

Verilmiş olan,  $F \in \mathbb{R}^{m \times n}$  gibi bir geri besleme kazanç matrisi için, sistemde kullanılan eyleyiciyi doyuma götürmeyen durumların kümesi,  $\mathcal{Q}(F) = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid |F_i x| \leq 1, i \in [1, m] \}$  şeklinde tanımlanabilir ki burada  $F_i$ , geri besleme kazanç matrisinin  $i$ . satırına karşılık gelir.

**Tanım3**

Köşegen üzerindeki her elemanı, 1 yada 0 değerini alabilen  $m \times m$  boyutlu köşegen matrislerin oluşturduğu  $\mathfrak{D}$  ile gösterilen kümeyi ele alalım. Açık ki, bu kümenin  $D_i^-$ ’ler ile temsil edilen  $2^m$  tane elemanı vardır yani  $i = 1, \dots, 2^m$  olacaktır. O halde,  $D_i^- = I - D_i$  tanımlaması altında  $D_i^-$  matrislerinin de  $\mathfrak{D}$  kümesine dahil olduğunu görmek mümkündür.

**Yardımcı Teorem:** [2,12]

$m$  boyutlu Reel vektör uzayının iki elemanı,  $u = [u_1, u_2, \dots, u_m]^T$  ve  $v = [v_1, v_2, \dots, v_m]^T$  olarak göz önüne alındığında, eğer  $v$  vektörünün tüm bileşenleri mutlak değerce 1’den küçük veya 1’e eşit iseler, yani,  $|v_i| \leq 1, \forall i \in [1, m]$  durumu söz konusu ise o halde, (4) ifadesi geçerli olacaktır.

$$sat(u) \in conv \{ D_i u + D_i^- v \mid i \in [1, 2^m] \} \tag{4}$$

**Teorem 1:**[3]

Verilmiş olan  $u = Fx$  geri beslemesine karşılık, (3) sistemi göz önüne alındığında, bilinen pozitif tanımlı bir  $P$  matrisi için şunları söylemek mümkündür. Eğer;

$$\begin{aligned} & (A + B_u(D_i F + D_i^- H))^T P + P(A + B_u(D_i F + D_i^- H)) + \frac{1}{\eta} P B_w B_w^T P \\ & + \frac{1}{\gamma^2} [C + D_{zu}(D_i F + D_i^- H)]^T [C + D_{zu}(D_i F + D_i^- H)] \leq 0, \quad \forall i \in [1, 2^m] \end{aligned} \tag{5}$$

eşitsizliklerini sağlayan,  $H \in \mathbb{R}^{m \times n}$  gibi bir matris ve  $\eta > 0$  pozitif sayısı mevcut ise ayrıca  $\mathcal{E}(P, 1 + \alpha\eta) \subset \mathcal{Q}(H)$  ise yani  $\mathcal{E}(P, 1 + \alpha\eta)$  elipsoidi,  $\mathcal{Q}(H)$  tarafından kapsanıyorsa, -ki burada  $\mathcal{Q}(H)$  gösterimi  $H$  matrisi ile lineer olarak geri beslenebilecek durumların kümesini ifade etmektedir- O halde  $\mathcal{W}_\alpha$  bozucu kümesinden seçilen her  $w$  bozucusuna karşılık, kapalı çevrim sisteme dair tüm yörüngeler,  $\mathcal{E}(P, 1)$  elipsoidi içerisinde kaynaklandıkları takdirde daima  $\mathcal{E}(P, 1 + \alpha\eta)$  elipsoidi içinde kalacaklar ve sistem  $\forall x(0) \in \mathcal{E}(P, 1)$  başlangıç koşulu için,  $w$  girişinden  $z$  çıkışına, sonlu  $L_2$  kazancıyla kararlı olacaktır. Söz konusu kazanç için üst sınır  $\frac{\|z\|}{\|w\|} \leq \gamma \sqrt{(1 + \alpha\eta)/\alpha}$  şeklindedir.

**İspat:**

$V(x) = x^T P x$  ifadesi, kapalı çevrim sistemin Lyapunov fonksiyonu olarak seçilsin. Lyapunov fonksiyonunun kapalı çevrim sistemin yörüngeleri boyunca zamana nazaran türevinin ifadesi,

$$\dot{V} = 2x^T P [Ax + B_u sat(Fx) + B_w w] \tag{6}$$

şeklinde olacaktır. O halde bir  $H \in \mathbb{R}^{m \times n}$  matrisi için  $\mathcal{E}(P, \rho) \subset \mathcal{V}(H)$ , ilişkisini gerçekleyen bir  $\mathcal{E}(P, \rho)$  elipsoidi içerisinde seçilen  $\forall x \in \mathcal{E}(P, \rho)$  durumları için (6) no'lu türev ifadesinde yer alan  $\text{sat}(Fx)$ 'e karşılık Yardımcı Teorem gereğince,

$$2x^T P[Ax + B_u \text{sat}(Fx) + B_w w] \leq \max_{i \in [1, 2^m]} 2x^T P[Ax + B_u(D_i F + D_i^- H)x + B_w w] \quad (7)$$

eşitsizliğinin yazılması mümkündür. Dikkat edilirse,

$$2x^T P B_w w \leq \frac{1}{\eta} x^T P B_w B_w^T P x + \eta w^T w, \quad \forall \eta > 0$$

ilişkisi göze çarpar. O halde (7) no'lu eşitsizlik,

$$\dot{V} \leq \max_{i \in [1, 2^m]} 2x^T P[Ax + B_u(D_i F + D_i^- H)]x + \frac{1}{\eta} x^T P B_w B_w^T P x + \eta w^T w, \quad \forall x \in \mathcal{E}(P, \rho) \quad (8)$$

şeklinde düzenlenebilir. Burada (5) eşitsizliğinin var olduğu kabulüne istinaden,

$$\dot{V} \leq -\frac{1}{\gamma^2} x^T [C + D_{zu}(D_i F + D_i^- H)]^T [C + D_{zu}(D_i F + D_i^- H)]x + \eta w^T w, \quad \forall x \in \mathcal{E}(P, \rho) \quad (9)$$

sonucuna ulaşılır.  $\mathcal{E}(P, \rho)$  elipsoidi için  $\rho$  değeri,  $\rho = 1 + \alpha\eta$  olarak alınıp, (9) no'lu eşitsizliğin her iki tarafı, (0'dan  $t$ 'ye kadar) integre edildiği taktirde,

$$V(x(t)) \leq -\frac{1}{\gamma^2} \int_0^t z(\tau)^T z(\tau) d\tau + \eta \int_0^t w(\tau)^T w(\tau) d\tau + V(x(0)), \quad \forall t \geq 0 \quad (10)$$

elde edilir.  $w$  bozucularının  $\mathcal{W}_\alpha$  kümesinden seçildiği ve tüm yörüngelerin  $\mathcal{E}(P, 1)$  elipsoidi içerisinde kaynaklandıkları varsayımı sebebiyle,  $V(x(0)) \leq 1$  olduğu düşünülürse,  $t \rightarrow \infty$  için (10) eşitsizliğinden  $V(x(t)) \leq 1 + \alpha\eta, \quad \forall t \geq 0$  sonucu bulunur. Bu ise  $x(t) \in \mathcal{E}(P, 1 + \alpha\eta)$  olmasıyla eşdeğerdir.

Diğer taraftan  $\forall t \geq 0$  için  $V(x(t)) \geq 0$  olduğu bilindiğinden, (10) no'lu eşitsizlik yardımıyla,  $\|z\|^2 \leq \gamma^2(1 + \alpha\eta)$  olduğu kolaylıkla görülebilir. Ki bu da sistemin  $L_2$  kazancının,  $\frac{\|z\|}{\|w\|} \leq \gamma\sqrt{(1 + \alpha\eta)/\alpha}$  şeklinde üstten sınırlandırıldığı ifade eder.

Ayrıca sisteme etkiyen herhangi bir bozucu giriş bulunmaması halinde, Teorem 1'in (5) no'lu matris eşitsizlik kısıtı, negatiflik yerine kesin negatiflik şeklinde değiştirildiğinde, (9) no'lu eşitsizliğe dayanarak,  $\forall x \in \mathcal{E}(P, 1 + \alpha\eta)$  için,  $\dot{V} < -\frac{1}{\gamma^2} \|z\|^2 < 0$  sonucu bulunur. Bu sonuç,  $\mathcal{E}(P, 1)$  elipsoidi içerisinde başlayan tüm  $x(t)$  yörüngelerinin,  $\mathcal{E}(P, 1 + \alpha\eta)$  elipsoidi dışına çıkmaksızın,  $t \rightarrow \infty$  için asimptotik olarak orijine yakınsayacağını göstermektedir. Bu durum ise, söz konusu  $\mathcal{E}(P, 1 + \alpha\eta)$  elipsoidinin, sistemin çekim domeni içerisinde yer aldığı ortaya koyar.

### 3.1. Eyleyici Doyumunu Altında $L_2$ Kazancını Minimize Eden Optimal Kontrolcü Tasarımı

Teorem 1'in de yardımıyla eyleyici doyumlu sistemler için  $L_2$  Optimal Kontrolcüyü Teorem 2'de yer alan optimizasyon probleminin çözümünden elde etmek mümkündür.

#### **Teorem 2:**

$S = S^T > 0 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , matrisi ile beraber  $\eta > 0$  ve  $\beta > 0$  sabitleri verilmiş olsunlar. Sistemin başlangıç koşullarının da,  $\mathcal{E}(S, \beta) \in \mathcal{E}(P, 1)$  içinde yer aldığı farz edilsin. Bu durumda,

$$\begin{aligned} & \inf_{Q>0, Y, Z} r \\ & \text{öyle ki,} \\ & a) \begin{bmatrix} AQ + B_u D_i Z + B_u D_i^- Y + * & B_w & QC^T + Z^T D_i D_{zu}^T + Y^T D_i^- D_{zu}^T \\ & B_w^T & -\eta I \\ & * & 0 \\ & & & -rI \end{bmatrix} \preceq 0, \\ & \quad \forall i \in [1, 2^m] \\ & b) \begin{bmatrix} \left(\frac{1}{1 + \alpha\eta}\right) & y_i \\ & y_i^T \\ & & Q \end{bmatrix} \succeq 0, \quad \forall i \in [1, m] \\ & c) \begin{bmatrix} 1/\beta^S & I \\ I & Q \end{bmatrix} \succeq 0 \end{aligned} \tag{11}$$

kısıtları sağlansın.

şeklindeki optimizasyon problemini birlikte çözen  $Q > 0, Y, Z$  matrisleri bulunabiliyorsa,  $u = ZQ^{-1}x$  geri besleme kuralı ile oluşturulan kapalı çevrim sisteme dair  $L_2$  kazancı,  $\gamma = \sqrt{r}$  olmak kaydıyla,  $\gamma\sqrt{(1 + \alpha\eta)/\alpha}$  değerinden küçük kalacaktır.

**İspat:**

(5) no'lu eşitsizlik geçerli olsun. Bu eşitsizliğin her iki yanı sağdan ve soldan  $P^{-1}$  ile çarpılıp  $Q := P^{-1}$  değişken dönüşümü yapılacak olursa,

$$\begin{aligned} & Q(A + B_u D_i F)^T + (A + B_u D_i F)Q + (B_u D_i^- H Q)^T + B_u D_i^- H Q + \frac{1}{\eta} B_w B_w^T \\ & + \frac{1}{\gamma^2} Q[C + D_{zu}(D_i F + D_i^- H)]^T [C + D_{zu}(D_i F + D_i^- H)]Q \preceq 0, \quad \forall i \in [1, 2^m] \end{aligned} \tag{12}$$

(12) bulunur. Burada  $Z := FQ$  ve  $Y := HQ$  değişken dönüşümleri ile birlikte,

$$\begin{aligned} & AQ + B_u D_i Z + QA^T + Z^T D_i B_u^T + B_u D_i^- Y + Y^T D_i^- B_u^T + \frac{1}{\eta} B_w B_w^T \\ & + \frac{1}{\gamma^2} (QC^T + Z^T D_i D_{zu}^T + Y^T D_i^- D_{zu}^T) (QC^T + Z^T D_i D_{zu}^T + Y^T D_i^- D_{zu}^T)^T \preceq 0, \\ & \forall i \in [1, 2^m] \end{aligned} \tag{13}$$

(13) eşitsizliği elde edilir. Bu eşitsizlik üzerinde Schur Tümleniyeni uygulandığı takdirde, (11) no'lu optimizasyon probleminin a) kısıtı doğrudan doğruya elde edilebilir.

b) kısıtı ise aslında Teorem 1'de yer alan  $\mathcal{E}(P, 1 + \alpha\eta) \subset \mathcal{L}(H)$  koşulunun, (14)'te yer alan işlemler neticesinde, LME' ne dönüştürülmesinden başka bir şey değildir. Şöyle ki;

$$\begin{aligned} & \mathcal{E}(P, 1 + \alpha\eta) \subset \mathcal{L}(H) \\ & \Leftrightarrow H_i^T H_i \preceq P \left(\frac{1}{1 + \alpha\eta}\right), \quad \forall i \in [1, m] \\ & \Leftrightarrow (1 + \alpha\eta)H_i^T H_i \preceq P, \quad \forall i \in [1, m] \\ & \Leftrightarrow \begin{bmatrix} P & H_i^T \\ H_i & \left(\frac{1}{1 + \alpha\eta}\right)I \end{bmatrix} \succeq 0, \quad \forall i \in [1, m] \\ & \Leftrightarrow \left(\frac{1}{1 + \alpha\eta}\right)I \succeq H_i P^{-1} H_i^T, \quad \forall i \in [1, m] \\ & \Leftrightarrow \left(\frac{1}{1 + \alpha\eta}\right)I - H_i Q Q^{-1} Q H_i^T \succeq 0, \quad \forall i \in [1, m] \end{aligned} \tag{14}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} \left(\frac{1}{1+\alpha\eta}\right) & y_i \\ y_i^T & Q \end{bmatrix} \succcurlyeq 0, \quad \forall i \in [1, m]$$

olduğu görülmür.

Ayrıca Teorem 2'de, sistemin başlangıç koşullarının da,  $\mathcal{E}(S, \beta) \in \mathcal{E}(P, 1)$  elipsoidi içinde yer alması şartı kabul edilmişti.

Bu şart için ilk olarak,

$$\mathcal{E}(S, \beta) \in \mathcal{E}(P, 1) \Leftrightarrow \frac{1}{\beta} S \succcurlyeq P \quad (15)$$

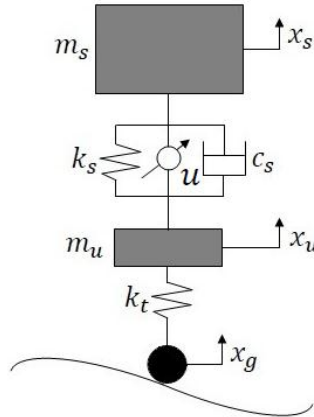
eşitsizliği göze çarpar. Bu eşitsizlik üzerine Schur Tümleniyeni uygulandığı takdirde ise,

$$\mathcal{E}(S, \beta) \in \mathcal{E}(P, 1) \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1/\beta S & I \\ I & Q \end{bmatrix} \succcurlyeq 0 \quad (16)$$

ilişkisi elde edilir. Bu da Teorem 2'de yer alan  $\mathcal{E}(S, \beta) \in \mathcal{E}(P, 1)$  kabulünün, teoremden sunulan optimizasyon probleminin, c) kısıtına karşı geldiğini gösterir.

#### 4. BENZETİM SONUÇLARI VE DEĞERLENDİRMELER

Bu bölümde, 1:1 ölçekli gerçek bir çeyrek taşıt süspansiyon sistemi modeli için Eyleyici Doyumu Altında  $L_2$  Kazancını Minimize Eden  $L_2$  Optimal Kontrolcünün performansını değerlendirmek amacıyla bir dizi benzetim çalışması gerçekleştirilmiştir.



Şekil 1. Çeyrek Taşıt Aktif Süspansiyon Sistemi

Taşıt süspansiyonunun sadece tek tekerlek için modellenmesi sonucunda iki serbestlik derecesine sahip çeyrek taşıt süspansiyon sisteminin matematik modeli elde edilmiş olur. Söz konusu modelde;  $m_s$  yaylanan şasi kütlelerini ya da taşıtın kütlelerini,  $m_u$  tekerlek bütününe dair kütleleri,  $k_s$  süspansiyon için yay sabitini,  $c_s$  dampere ilişkin sönüm katsayısını,  $k_t$  lastik için yay sabitini,  $x_g$  yol yüzeyinin değişimini ve  $f$  ise tekerlek bütünü ile şasi arasında uygulanan kontrol kuvvetini göstermektedir. Sistemin dinamik denklemleri, Newton'un ikinci kanunu gereğince,

$$m_u \ddot{x}_u = k_t(x_g - x_u) - k_s(x_u - x_s) - c_s(\dot{x}_u - \dot{x}_s) - f \quad (17)$$

$$m_s \ddot{x}_s = k_s(x_u - x_s) + c_s(\dot{x}_u - \dot{x}_s) + f \quad (18)$$

(17) ve (18)'deki gibi elde edilirler.

Bu denklemler durum uzayında ifade edilecek olursa,

$$\dot{x} = Ax + [B_w \quad B_u] \begin{bmatrix} w \\ u \end{bmatrix} \quad (19)$$

$$z = Cx + [D_{zw} \quad D_{zu}] \begin{bmatrix} w \\ u \end{bmatrix} \quad (20)$$

gösterimine ulaşılır ki burada,  $x = [x_s \ x_u \ \dot{x}_s \ \dot{x}_u]^T$  durum vektörüne,  $w = x_g$  bozucu girişe,  $u = f$  ise kontrol girişine karşılık gelmektedir. Durum uzayı matrisleri ise (21)'deki gibidirler,

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -k_s/m_s & k_s/m_s & -c_s/m_s & c_s/m_s \\ k_s/m_u & -(k_s + k_t)/m_u & c_s/m_u & -c_s/m_u \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} B_w = [0 \ 0 \ 0 \ k_t/m_u]^T \\ B_u \\ = [0 \ 0 \ 1/m_s \ -1/m_u]^T \end{matrix} \quad (21)$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -k_s/m_s & k_s/m_s & -c_s/m_s & c_s/m_s \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} D_{zw} = [0 \ 0]^T \\ D_{zu} = [0 \ 1/m_s]^T \end{matrix}$$

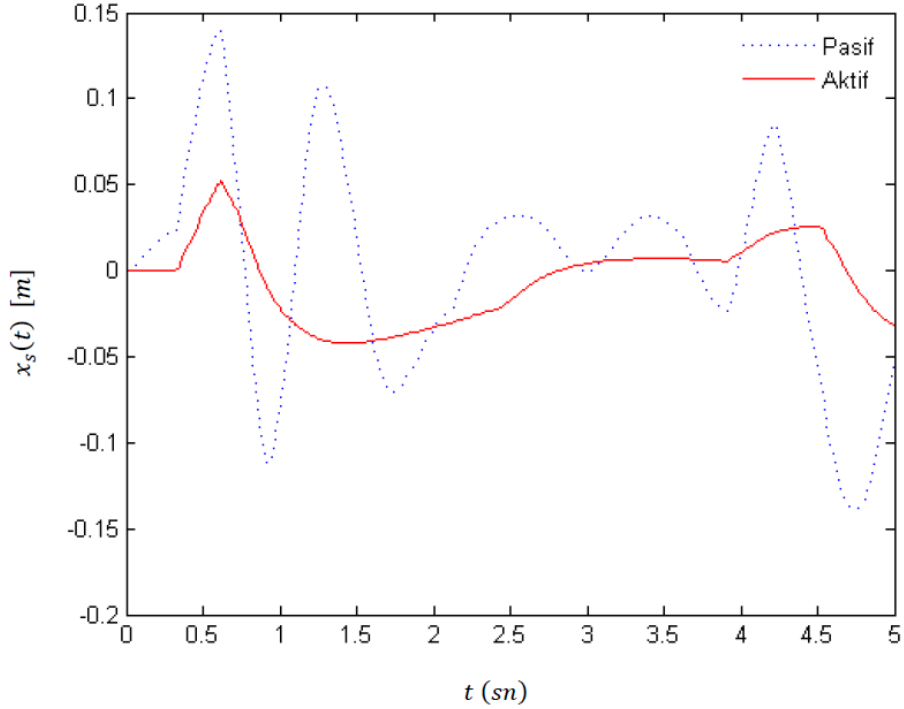
Şekil 1'de şematik olarak gösterilmiş olan çeyrek taşıt aktif süspansiyon sisteminin fiziksel parametre değerleri şu şekildedir:  $m_s = 250kg$ ,  $m_u = 45kg$ ,  $k_s = 16000 N/m$ ,  $k_t = 160000 N/m$  ve  $c_s = 1000 Ns/m$  olarak alınmıştır. Şasinin deplasmanı  $x_s$ , tekerlek bütünüünün deplasmanı  $x_u$ , ve yol kaynaklı bozucu giriş  $x_g$  ile ifade edilmişlerdir.  $u$  harici kuvveti gösterir ve değerinin doyumlu olarak,

$$sat \ u(t) = \begin{cases} u(t); & -4000N \leq u(t) \leq 4000N \\ -4000N; & u(t) < -4000N \\ 4000N; & u(t) > 4000N \end{cases}$$

şeklinde değiştiği kabul edilmiştir.

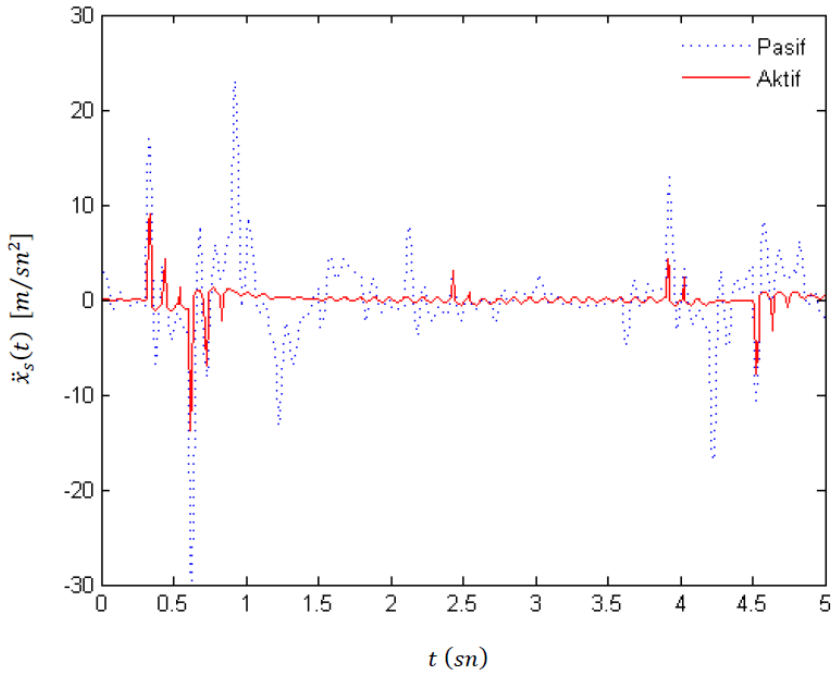
Gerçekleştirilen simülasyonlarda süspansiyon sistemi bozucu giriş olarak çakıllı yol profiline maruz bırakılmıştır. Bu durumda kontrollü ve pasif süspansiyon için şasi yer değiştirmesi ve şasiye dair ivmelenme performansları –ki süspansiyonun sağladığı konfor şasi ivmelenmesi ile ölçülmektedir- ve bu performansları üreten kontrol işareti değişimleri sırasıyla, Şekil 2, Şekil 3 ve Şekil 4'teki gibi elde edilmişlerdir.



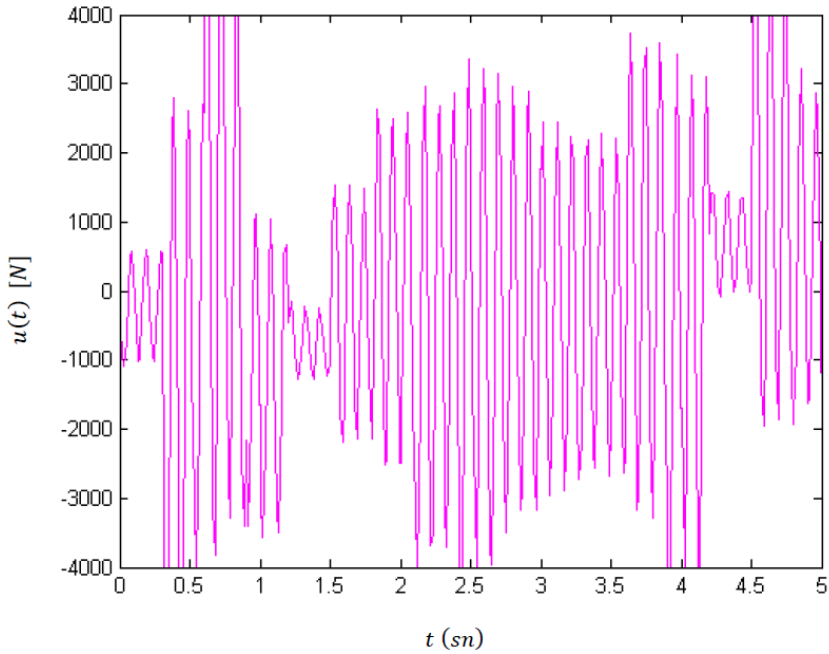


**Şekil 2.** Çakıllı Yol Girişine Karşılık Eyleyici Doymulu  $L_2$  Kontrolcü Altında Şasi Yer Değiştirme Cevabı

Kontrollü ve pasif süspansiyona karşılık şasiye dair yer değiştirme cevabı incelenecek olursa, pasif süspansiyon için şaside denge konumuna nazaran mutlak değerce  $0.15\text{ m}$ 'ye varan sapsmaların oluştuğunu, kontrollü süspansiyon için ise maksimum  $0.05\text{ m}$  civarında bir sapma meydana geldiğini görmek mümkündür. İvme cevapları açısından bakıldığında da yine benzer sonuçlarla karşılaşılmaktadır. Pasif süspansiyon mutlak değerce  $30\text{ m/sn}^2$ 'lik ivmelenme değerleri ortaya koyarken, kontrollü süspansiyon, sadece kontrol kuvvetinin doyuma ulaştığı anlarda  $10\text{ m/sn}^2$  civarında bir ivmelenme göstermekte, kontrol kuvvetinin eyleyicinin doyum sınırı olan  $\pm 4000\text{ N}$  bandına ulaşmaması halinde ise pasif süspansiyonla kıyaslanamayacak ölçüde iyi bir performans ortaya koymaktadır.



**Şekil 3.** Çakıllı Yol Girişi İçin Eyleyici Doyumlu Kontrolcünün Şasi İvme Cevabı



**Şekil 4.** Çakıllı Yol Girişine Karşılık Eyleyici Doyumlu Kontrolcünün Ürettiği Kontrol İşareti

Hem şasi yerdeğişimi hem de ivme cevaplarına bakıldığında eyleyicinin doyuma gittiği anlarda ufak pikler görülse de aktif süspansiyonun performansının pasif süspansiyona nazaran oldukça tatminkar düzeyde olduğunu görmek mümkündür. Sonuç olarak, süspansiyon sistemi için, dışbükey yaklaşımla tasarlanmış olan doyumlu  $L_2$  optimal kontrolcünün başarılı bir performans sergilediği söylenebilir.

## REFERENCES / KAYNAKLAR

- [1] Chitour, Y., Liu, W., & Sontag, E., “On the continuity and incremental-gain properties of certain saturated linear feedback loops”, *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 65, 13\_440, (1995).
- [2] Hu, T., ve Lin, Z., *Control Systems With Actuator Saturation: Analysis and Design*, Vol. xvi (392p). Boston: BirkhHauser, (2001).
- [3] Fang, H., Lin, Z., ve Hu, T., “Analysis of Linear Systems in the Presence of Actuator Saturation and  $L_2$ -Disturbances”, *Automatica*, 40(7), 1229–1238, 2004.
- [4] Fang, H., Lin, Z., & Shamash, Y., Disturbance tolerance and rejection for linear systems with imprecise knowledge of the actuator input output characteristics. *Automatica*, 42(9), 1523\_1530, (2006).
- [5] Hindi, H., & Boyd, S., Analysis of linear systems with saturation using convex optimization. In *Proc. 37th IEEE conf. dec. and contr.* pp. 903\_908, (1998).
- [6] Nguyen, T., & Jabbari, F., Disturbance attenuation for systems with input saturation: an LMI approach. *Institute of Electrical and Electronic Engineers. Transactions on Automatic Control*, 44(4), 852\_857, (1999).
- [7] Jeremy, G., Richard, D., “A tutorial on Linear and Bilinear Matrix Inequalities”, *Journal of Process Control.*, vol.10, 363-385, 2000.
- [8] Boyd, S., Balakrishnan, V., Feron, E., et. al. “Control system analysis and synthesis via linear matrix inequalities.” *Proceeding of the American Control Conference*, San Francisco, USA: 2147-2154. 1993.
- [9] Gahinet, P., Nemirovski, A., Laub, A. J. and Chilali, M. “LMI Control Toolbox for use with MATLAB”. Natick, MA, The MathWorks, Inc. 1995.
- [10] Sturm, J. F., “Using SeDuMi 1.02, A MATLAB Toolbox for Optimization Over Symmetric Cones”, *Optimization Methods and Software*, 11-12 : 625-653, (1999).
- [11] Lofberg, J., “YALMIP : A Toolbox for Modeling and Optimization in MATLAB”, *Proceedings of the CacsD Conference*, Taipei, Taiwan, 2004.
- [12] Hu, T., Lin, Z. ve Chen, B. M., “An Analysis and Design Method for Linear Systems Subject to Actuator Saturation and Disturbance”, *Automatica*, 38(2):351–359, 2002.