

MESH SIZE EFFECT ON LOAD CARRYING CAPACITY OF THE REINFORCED CONCRETE BEAMS WITHOUT STIRRUPS BY USING DRUCKER-PRAGER AND CRACKING CONCRETE FRACTURE CRITERIA

Güray ARSLAN*

Yıldız Teknik Üniversitesi, İnşaat Fakültesi, İnşaat Mühendisliği Bölümü, Yıldız-İSTANBUL

Geliş Received: 05.06.2003 Kabul/Accepted: 02.09.2004

ABSTRACT

In this study, finite element mesh size effect on load carrying capacity of the reinforced concrete beams has been investigated. The reinforced concrete beam, which has been analysed, has two rows tensile reinforcement without stirrups. The beam is subjected to concentrated load at midspan and its shear span to depth ratio (a/d) is 3.92. In this study, two different selected fracture criteria have been used and analytical studies have been performed by using these two fracture criteria. In addition, results obtained from analytical study have been compared to the results of experiments existed in literature to verify the analytical study. **Keywords:** Load carrying capacity, Drucker-Prager, finite element, mesh size effect

YALNIZ ÇEKME DONATILI BETONARME KİRİŞTE SONLU ELEMAN BOYUTUNUN YÜK TAŞIMA KAPASİTESİ TAHMİNİNE ETKİSİNİN DRUCKER-PRAGER VE ÇATLAK MODELLERİ İLE KARŞILAŞTIRILMASI

ÖZET

Bu çalışmada, betonarme kirişin yük taşıma kapasitesinin analitik hesabında sonlu eleman boyut etkisi araştırılmıştır. Hesabı yapılan betonarme kiriş yalnız iki sıra çekme donatılıdır. Açıklık ortasında tekil yükü yüklenmiş kirişte (OA1), kesme açıklığının kiriş etkili derinliğine oranı (a/d) 3.92'dir. Söz konusu kirişte; beton için iki farklı kırılma kriteri seçilmiş ve analitik çözümler iki farklı kırılma kriteri kullanılarak yapılmıştır. Ayrıca, analitik çözümlerden elde edilen sonuçlar literatürde yer alan deneysel sonuçlarla karşılaştırılmıştır.

Anahtar Sözcükler: Yük taşıma kapasitesi, Drucker-Prager, sonlu eleman, ağ boyutu etkisi

1. GİRİŞ

Statik ve dinamik yükler altında betonarme elemanların hesabı; yüklemenin, malzeme davranışının ve sayısal çözüm yöntemlerinin dikkate alınmasını gerektirmektedir. Doğrusal olmayan sonlu eleman yöntemi, betonarmenin sayısal çözümleme alanında Ngo ve Scordelis'in [1] öncü sayılan çalışmalarından bu yana, güçlü bir araç olarak yaygın kullanılır hâle gelmiştir. Geçen otuz yedi yıllık zaman süresinde, betonun mekanik davranışını, bu arada kesme mukavemetini de dikkate alarak modelleyen çok sayıda çalışma yapılmıştır. Beton için önerilen genelleştirilmiş malzeme davranış denklemleri, genellikle monotonik yüklere maruz betonarme

* e-mail: aguray@yildiz.edu.tr , Tel: (0212) 259 7070/ 2738

elemanların temel karakteristiklerini tanımlayacak üç boyutlu gerilme-birim şekil değiştirme ilişkilerini vermektedir. Bünye denklemleri, betonarme elemanların hesabında ihtiyaç duyulan en önemli bağıntılardır. Ancak; betonun doğrusal olmayan davranışına ait matematiksel modeller beton ve donatı çeliği davranışları ile birlikte, çelik ve beton arasındaki aderansın da doğru modellenmesini gerektirir. Betonarme elemanların kompozit davranışını ifade etmek için, her iki malzeme de de uygun gerilme-birim şekil değiştirme bağıntıları tanımlanmalıdır. Bu çalışmada, beton ve çelik arasında aderansın tam olarak sağlandığı varsayılmıştır.

Sonlu elemanlar yöntemi ile çalışan bilgisayar programları; genellikle elastik, doğrusal olmayan elastik ve plastik modeller yardımıyla statik ve dinamik yükler altında çözümleri içermektedir. Malzemelerin bünyesel olarak modellenmesi amacıyla, pek çok matematiksel bağıntı geliştirilmiştir. Bu bağlamda başlıca modeller; plastik, doğrusal olmayan elastik, elasto-plastik, kırılma mekaniği, düzgün yayılı çatlak, hasar ve mikro çatlak modelleridir [2]. Lineer teoride malzemenin akma gerilmesi aşılmadıkça, gerilme-birim şekil değiştirme ilişkisi doğrusal kabul edilir ve hesaplar doğrusal elastisite teorisine göre yapılır. Akma gerilmesi üzerindeki gerilmeler (pekleşme) genelde dikkate alınmamaktadır. Bu anlamda, yapıların elastik olarak incelenmesinin, gerilme dağılımının her zaman düzgün olmadığı ve yüksek gerilmeli yerel bölgelerin plastikleşebileceği ihtimalini dikkate almayan yaklaşımların gerçeği tam olarak yansıtmayacağı açıktır. Plastik hesap, süneklikten faydalanarak, beton içinde düzgün dağılmayan gerilmeleri daha gerçekçi şekilde hesaplamaya imkan verir [3].

Pek çok araştırmacı, örnek sayısal çözümlmeyi; açıklık ortasında tekil yükü yüklenmiş Bresler ve Scordelis [4] deney girişinde (OA1) sınamayı tercih etmişlerdir. Bu çalışmada da, bu seçilmiş girişin deney sonuçları ile sonlu eleman çözümlerinin sonuçları, beton için önerilen bünye bağıntılarının doğruluğunu göstermek için kullanılmıştır. Göçme mukavemeti bakımından girişlerin davranışı doğru tanımlanabilmesine mukabil [2], kesme ve eğilme etkisindeki betonarme girişlerin davranışının genel tanımı için genellikle yeteri kadar başarılı olunamamıştır. Bu çalışmada; yalnız çekme donatılı betonarme girişte (OA1) sonlu eleman boyutunun yük taşıma kapasitesine etkisinin “Drucker-Prager” ve “Çatlak Modeli” ile araştırılması amaçlanmıştır. Betonarme girişin (OA1) sonlu eleman plastik analizleri LUSAS programı [5] ile yapılmıştır. Analizde, donatı için Tresca akma kriteri, beton için Drucker-Prager ve Çatlak Modeli kırılma kriteri kullanılarak hesaplanan yük taşıma kapasiteleri karşılaştırılmıştır. Seçilen eleman tipleri beton için QPM8 (iki boyutlu izoparametrik eleman), donatı için BAR2 (iki boyutlu izoparametrik çubuk eleman)’dır.

2. BETON KIRILMA KRİTERLERİ YARDIMIYLA PLASTİK ANALİZ

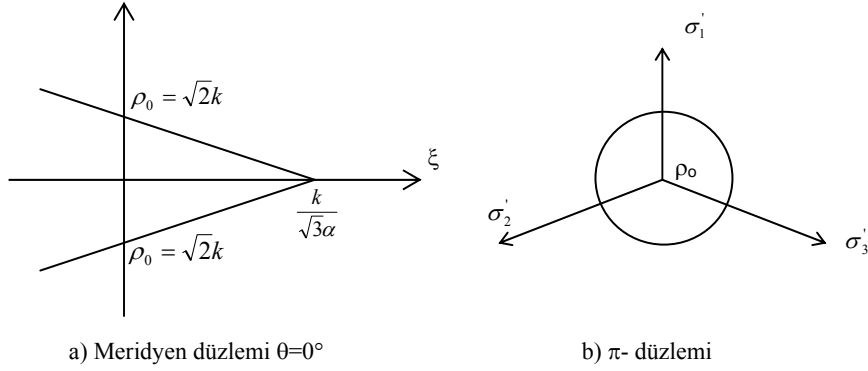
2.1. Drucker-Prager Malzeme Modeli

Malzemelerin bünye denklemlerinin belirlenmesinde kullanılan pek çok matematiksel model; betonun mekanik davranışını, plastik ve visko plastik teoriler yardımıyla ifade edebilmektedir. Bunlardan en çok kullanılanı ise; Drucker-Prager malzeme modelidir. Söz konusu modelde akma kriteri, von-Mises kriterinin genelleştirilmiş şeklidir. Drucker-Prager malzeme modelinde akma kriteri, von-Mises kriterinde hidrostatik gerilme etkisini ek bir terim ile dikkate alarak;

$$f(I_1, J_2) = \alpha I_1 + \sqrt{J_2} - k = 0 \quad (1)$$

şeklinde ifade edilmektedir. Burada α ve k , malzeme sabitleri, I_1 gerilme tansörünün birinci invariantı ve J_2 ise deviyatör tansörünün ikinci invariantıdır. $\alpha=0$ olması durumunda kriter, von-Mises kriteri ile aynı olacaktır [6]. Denklem 1’in gösterdiği akma yüzeyi, asal gerilme uzayında bir dairesel konidir; meridyenleri ve π -düzlemindeki kesiti Şekil 1’de verildiği gibidir.

Şekil 2’de görüldüğü gibi Drucker-Prager kriteri, Mohr-Coulomb kriterine oldukça yakındır; Drucker-Prager kriterinin dairesi, Mohr-Coulomb altgenine dıştan çizilen bir sınır daire olarak düşünülürse, iki yüzey $\theta=60^\circ$, α ve k ile belirlenecek basınç meridyenine uygun olarak;



Şekil 1. Drucker-Prager kriteri [6]

$$\alpha = \frac{2 \sin \phi}{\sqrt{3}(3 - \sin \phi)}, \quad k = \frac{6c \cos \phi}{\sqrt{3}(3 - \sin \phi)} \quad (2)$$

şeklinde belirlenebilir. Burada ϕ ve c , sırası ile, malzemenin içsel sürtünme açısını ve kohezyonunu ifade eden parametrelerdir. Denklem 2'deki sabitler ile belirlenen koni, Mohr-Coulomb akma yüzeyindeki altıgen piramidi çevreleyen bir dış zarf görünümündedir; Şekil 2. Ayrıca çekme meridyeninden (ρ) geçen, $\theta=0^\circ$ ile belirlenecek iç koniyi ifade eden sabitler;

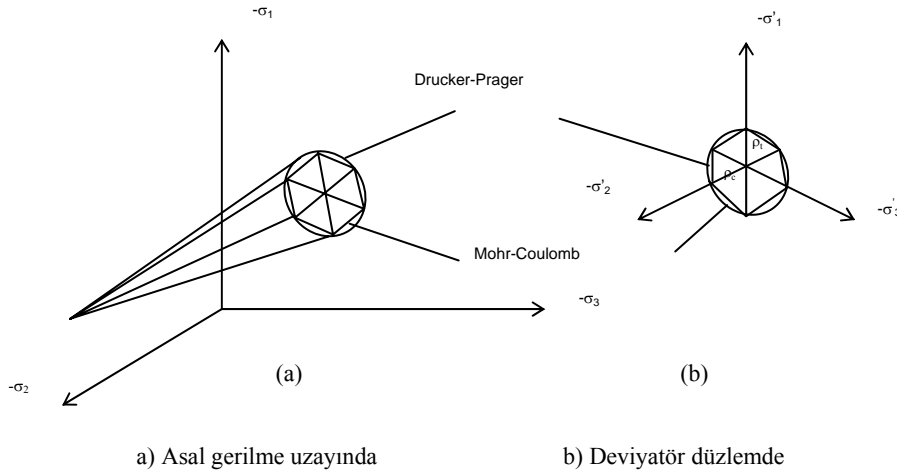
$$\alpha = \frac{2 \sin \phi}{\sqrt{3}(3 + \sin \phi)}, \quad k = \frac{6c \cos \phi}{\sqrt{3}(3 + \sin \phi)} \quad (3)$$

olarak belirlidir. Bu çalışmada, malzemenin kohezyon katsayısı c için,

$$c = 0.23 \ln(E_0 d_{\max}^2) - 0.60 \quad (4)$$

bağıntısı kullanılmıştır [7-8].

Örnek betonarme kirişte en büyük agrega boyutu (d_{\max}) 19 mm (3/4 in)'dir. Betonun elastisite modülü 22500 MPa için, kohezyon katsayısı 3.06 bulunmaktadır [7-8]. Malzeme modelinde beton için içsel sürtünme açısı 33° alınmıştır.



Şekil 2. Drucker-Prager ve Mohr-Coulomb kriterlerinin karşılaştırılması [6]

2.2. ÇATLAK MODELİ

Modelde, gelişen çatlakla malzemenin yumuşadığı ve yük artımı sonunda mukavemetini kaybettiği farz edilir. Beton mukavemetinde azalma; betonun çekme mukavemeti ve yumuşama eğrisi sonundaki şekil değiştirme ile ifade edilen üslü fonksiyon ile tanımlanmaktadır. Betonun çekme gerilmesi-birim şekil değiştirme eğrisinde; yumuşama eğrisinin sonunda şekil değiştirme, $1.5 \cdot (\text{çekme mukavemeti} / \text{elastisite modülü})$ 'den büyük ise yük artımı sonlanmaktadır.

Hognestad tarafından önerilen, sarılmamış betonu içeren ve yaygın olarak kullanılan modelde σ - ε eğrisinin tepe noktasında kadar olan parçası ikinci derece parabol, düşüş parçası ise doğrusal varsayılmıştır. Tepe noktasındaki gerilmeye karşılık gelen birim kısalma, $\varepsilon_{co} = 2f_c / E_c$ olarak verilmiştir. Modelde, σ - ε eğrisinin yumuşama bölgesi sonunda maksimum şekil değiştirme değeri ise 0.0038'dir. Geliştirilmiş Kent ve Park modelinde sargısız betonda σ - ε eğrisinin yumuşama bölgesi sonunda maksimum şekil değiştirme değeri ise 0.004 alınabilmektedir [9]. Örnekteki betonarme kirişte betonun çekme mukavemeti değeri 2.25 MPa alınmıştır.

Bu çalışmada; beton için seçilen iki farklı kırılma kriterinde, sonlu eleman boyutlarının yük taşıma kapasitesinin tahminine etkisi araştırıldığından, farklı sonlu eleman boyutları denenerek parametrik bir araştırma yapılmıştır.

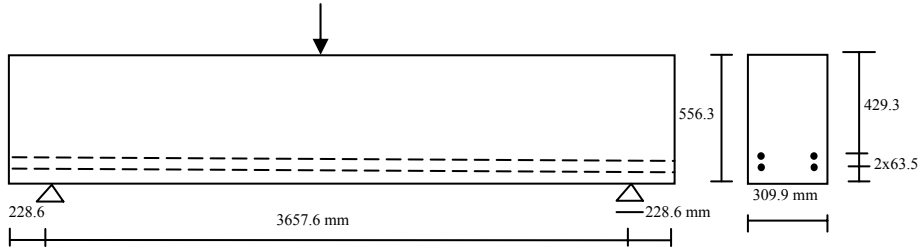
3. BETONARME KİRİŞİN ÖZELLİKLERİ

Elemanın özellikleri Çizelge 1'de verilmiştir (örnek, literatürde yer alan ve deney sonuçları bilinen bir örnektir) [4].

Çizelge 1. Elemanın özellikleri

Eleman	b_w (mm)	h (mm)	d (mm)	f'_c (MPa)	a/d	ρ	ρ'
OA1	309.9	556.3	461.05	22.5	3.97	0.0184	---

Açıklık ortasında tekil yükü yüklenmiş yalnız çekme donatılı betonarme kirişte (OA1); 4 adet 28.9 mm çaplı ve akma mukavemeti 555 MPa eğilme donatısı söz konusudur (Şekil 3).

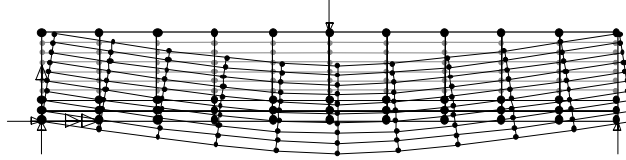


4. SONLU ELEMANLARIN BOYUTLARI VE YÜK TAŞIMA KAPASİTELERİ

Sayısal çözümlerinde genellikle, sonlu eleman boyutu küçüldükçe elemanların yük taşıma kapasitesi ve şekil değiştirmelerinde gerçeğe daha yakın sonuçlar elde edilebileceği düşünülmeye karşın, betonarme söz konusu olduğunda, beton sonlu elemanların boyutunda bir alt sınır bulunmaktadır. Bu alt sınır korunarak, sonlu eleman boyutundan kaynaklanan problemten kaçınılması mümkün olabilmektedir. Optimum sonlu eleman boyutu iki farklı yolla

tanımlanabilir. İlki, beton elemanlarda ölçülen şekil değiştirmelerde şekil değiştirme ölçüsünün uzunluğu gibi alınabilir, ki bu değer; beton karışımdaki en büyük agrega boyutunun iki-üç katı mertebesinde dir. Sonlu eleman boyutu küçüldükçe, genellikle betonun bünye bağıntılarının kullanımıyla uyumsuzluk doğmaktadır [10]. Bazant ve Oh [11] tarafından ifade edilen diğer çözümde ise; beton gibi heterojen malzeme eşit-sürekli-homojen malzeme olarak ifade edildiği zaman, mikro yapıda gerçek gerilme ve şekil değiştirmelerden sürekli homojen gerilme ve şekil değiştirmeler ayırt edilmelidir. Temsil edilen alan beton olduğu takdirde, optimum sonlu eleman boyutu beton karışımdaki en büyük agrega boyutunun iki-üç katı gibi alınabilir. Sonlu eleman boyutu küçüldükçe, erken göçen daha zayıf elemanların oluşması ile sayısal çözümlerelerde bulunan yük taşıma kapasitesi ve şekil değiştirme değerleri gerçeği yansıtamamaktadır. Bu çalışmada; betonarme kirişin doğrusal olmayan çözümünde optimum sonlu eleman boyutu, beton karışımdaki en büyük agrega boyutunun üç katından büyük seçilerek, mevcut yüksek mukavemetli beton kirişte, deney sonuçları ile tutarlı yük-yerdeğiştirme eğrisini veren uygun sonlu eleman boyutları araştırılmıştır. Bir başka ifade ile; sonlu eleman boyutları seçiminde herhangi bir yöndeki boyutun en büyük agrega boyutunun (en büyük agrega boyutu 19 mm'dir) üç katından büyük seçilmesine özen gösterilmiştir.

Şekil 4'de Çizelge 2'de verilen 10 serisinde 10x7 kirişinin sonlu eleman aralıklarının basit kiriş üzerinde uygulaması ve şekil değiştirmiş durumu görülmektedir. Açıklık ortası düğüm noktasında tekil yüklü kirişte, analitik çözümde karşılaştırılan yerdeğiştirme miktarı kiriş açıklık ortasında alt düğüm noktasının okunan değeri olarak alınmıştır.



Şekil 4. 10x7 kirişi sonlu eleman boyutları ve düğüm noktalarında yerdeğiştirmeler

Pek çok çalışmada uygulanan toplam yük-yerdeğiştirme eğrileri ile deney sonuçlarının uyumluluğu ilk kriter olarak göz önüne alınmaktadır. Yalnız çekme donatısına sahip betonarme kirişte (OA1), uygulanan her iki malzeme modelinde de sonlu eleman boyutlarına göre toplam yük taşıma kapasitesinde büyük değişimler oluşmaktadır. Deneysel olarak kirişin maksimum yük taşıma kapasitesi değeri 334 kN olarak bulunmuştur [4].

Drucker-Prager malzeme modelinde, deney sonuçları ile yük-yerdeğiştirme eğrileri karşılaştırıldığında; çubuk uzunluğu boyunca sonlu eleman boyutunun azalmasının yük taşıma kapasitesinin tahmininde azalma yönünde değişime sebep olduğu görülmektedir. Bir başka deyimle; çubuk uzunluğu boyunca sonlu eleman boyutu büyük seçilen kirişin hesaplanan yük taşıma kapasitesi, sonlu eleman boyutu küçük seçilene göre daha fazladır. Şekil 5'de her seride kiriş yüksekliğince sonlu eleman boyutu değişiminin yük-yerdeğiştirme eğrisine etkisi gösterilmiştir. Kirişe uygulanan toplam yük-yerdeğiştirme eğrilerinden kiriş yüksekliğince sonlu eleman boyutu değişiminin ise, kapasite artışına veya azalışına belirgin bir etkisi görülmemektedir.

Şekil 5'de OA1 (kesme ve basınç donatısız) kirişinin sonlu eleman boyutu çubuk uzunluğu boyunca ve kiriş yüksekliğinde değişimine bağlı olarak uygulanan toplam yük-yerdeğiştirme eğrileri, deney sonucuyla da karşılaştırılmıştır. Çubuk uzunluğu boyunca sonlu eleman boyutu artışının elastik sınırlar içerisinde önemli bir etkisi olmadığı görülmektedir. Ancak, elastik sınır ötesinde kiriş uzunluğu boyunca sonlu eleman boyutunun artışı yük taşıma kapasitesinin tahmininde önemli artışlar olarak kendini göstermektedir. Çubuk uzunluğu boyunca boyutların 365.76 mm (10 serisi) seçilmesi durumu ile 152.4 mm (24 serisi) seçilmesi durumunda, kirişin yük taşıma kapasitesinin sonlu eleman çözümlerinden bulunan değerleri

Mesh Size Effect on Load Carrying Capacity...

arasında önemli farklar oluşmaktadır; Şekil 6. Söz konusu kirişte, kiriş uzunluğu boyunca sonlu eleman boyutunun 152.4 mm seçilmesi durumunda deney sonuçları ile daha iyi örtüşen toplam yük-yerdeğiştirme eğrisi elde edilebilmiştir.

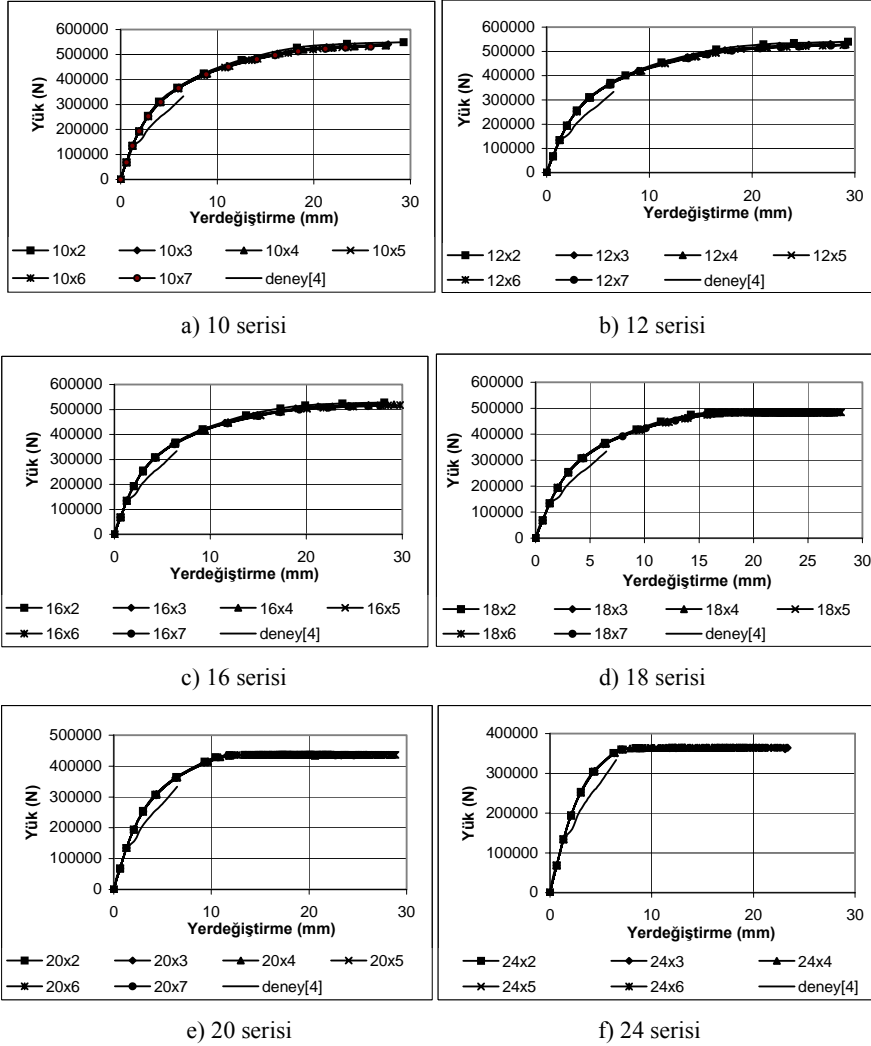
Çizelge 2'de çubuk uzunluğu boyunca (yatayda) ve kiriş yüksekliğince (düşeyde) eleman boyutları ayrıntılı olarak özetlenmiştir.

Çizelge 2. Sonlu eleman aralıkları, boyutları ve max. yük taşıma kapasiteleri

Sonlu eleman boyutları		Kiriş isimleri	Beton modeli		
Yatayda (mm)	Düşeyde (mm)		Çatlak Modeli		Drucker-Prager*
			Max. yük (kN)	Ort. Yük (kN)	Max. yük (kN)
365.76x10	2x63.5+2x214.65	10x2	336.7	315.17	567
	2x63.5+3x143.1	10x3	372.955		560
	2x63.5+4x107.325	10x4	316.634		556
	2x63.5+5x85.86	10x5	282.74		554
	2x63.5+6x71.55	10x6	327.487		553
	2x63.5+7x61.33	10x7	254.513		551
304.8x12	2x63.5+2x214.65	12x2	271.772	283.73	555
	2x63.5+3x143.1	12x3	283.215		547
	2x63.5+4x107.325	12x4	287.807		544
	2x63.5+5x85.86	12x5	295.520		543
	2x63.5+6x71.55	12x6	285.383		541
	2x63.5+7x61.33	12x7	278.661		541
228.6x16	2x63.5+2x214.65	16x2	290.170	276.634	543
	2x63.5+3x143.1	16x3	276.462		537
	2x63.5+4x107.325	16x4	267.794		533
	2x63.5+5x85.86	16x5	286.671		531
	2x63.5+6x71.55	16x6	258.294		530
	2x63.5+7x61.33	16x7	280.414		528
203.2 x18	2x63.5+2x214.65	18x2	248.567	243.027	484
	2x63.5+3x143.1	18x3	247.281		484
	2x63.5+4x107.325	18x4	241.807		484
	2x63.5+5x85.86	18x5	240.313		484
	2x63.5+6x71.55	18x6	241.427		484
	2x63.5+7x61.33	18x7	238.767		484
182.88x20	2x63.5+2x214.65	20x2	210.797	223.269	436
	2x63.5+3x143.1	20x3	264.823		436
	2x63.5+4x107.325	20x4	193.158		436
	2x63.5+5x85.86	20x5	196.244		436
	2x63.5+6x71.55	20x6	209.563		436
	2x63.5+7x61.33	20x7	265.028		436
152.4x24	2x63.5+2x214.65	24x2	230.269	229.674	364
	2x63.5+3x143.1	24x3	229.448		364
	2x63.5+4x107.325	24x4	229.723		364
	2x63.5+5x85.86	24x5	229.435		364
	2x63.5+6x71.55	24x6	229.494		364

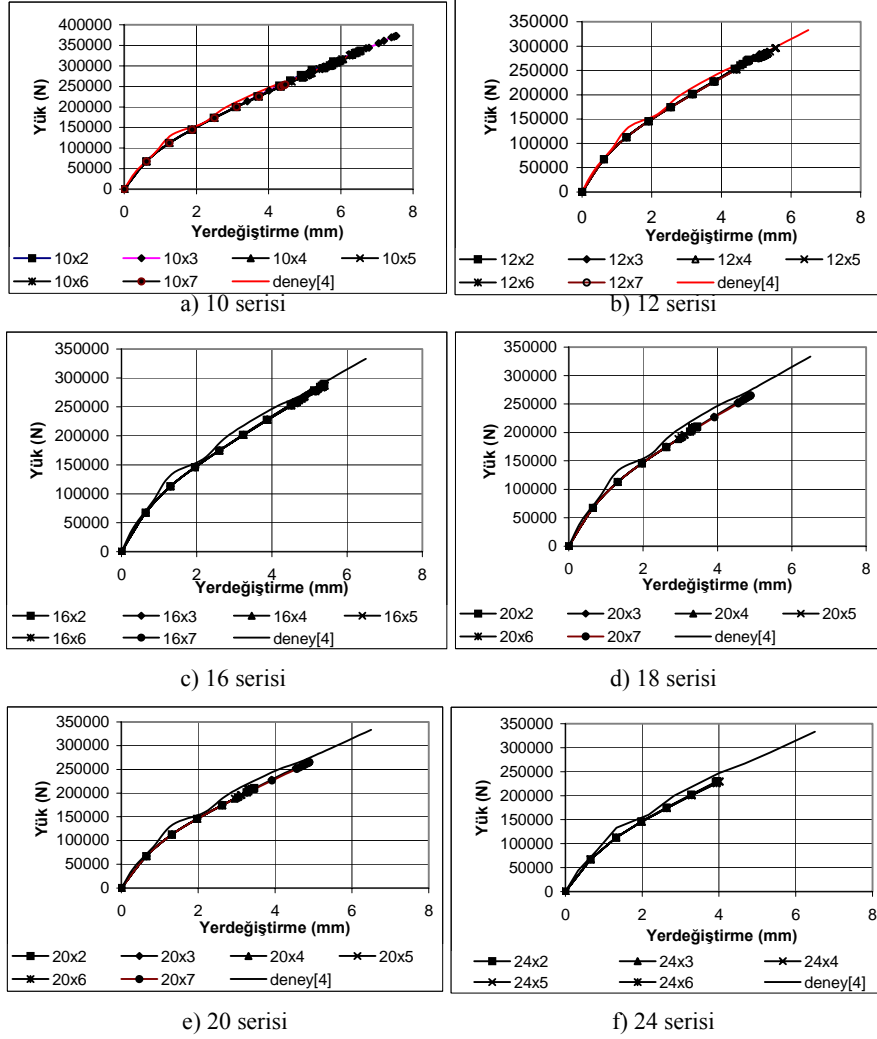
*Seçilen tüm sonlu eleman boyutlarında, beton için Drucker-Prager malzeme modelinde 50. yük artımındaki maksimum yük değeri yaklaşık sabit kaldığı için işleme son verilmiş ve bu adımdaki değerler çizelgeye işlenmiştir.

Çatlak modelinde; çubuk uzunluğu boyunca sonlu eleman boyutunun küçülmesi durumunda yük taşıma kapasitesinin tahmininde azalma yönünde değişim görülmektedir. Kiriş yüksekliğince sonlu eleman boyutu değişiminin yük taşıma kapasitesinde farklılığa sebep olmakla birlikte, bu farklılığın belirgin olarak artma yada azalma yönünde olduğu söylenememektedir. Söz konusu modelde; deneysel ve analitik yük-yerdeğiştirme eğrileri karşılaştırıldığında; çözümü yapılan sonlu eleman boyutlarındaki kirişler ile deneyde [4] elde edilen eğriler grafik olarak birbirleriyle örtüşmektedir. Fakat; yük taşıma kapasitelerinde sonlu eleman boyutlarına göre farklar oluşmaktadır. Sözü edilen kirişin yük taşıma kapasitelerindeki fark; çubuk uzunluğu boyunca sonlu eleman boyutu değişimi, sonlu eleman boyutu küçüldükçe yük taşıma kapasitesinde azalma olarak kendini göstermektedir. Doğrusal olmayan sonlu eleman sayısal çözümlerini ile yük taşıma kapasitesi tahmininde etkili ana faktör, sonlu eleman boyutunun çubuk uzunluğunca değişimi olmaktadır.



Şekil 5. Drucker-Prager modelinde yük-yerdeğiştirme eğrileri

Mesh Size Effect on Load Carrying Capacity...



Şekil 6. Çatlak modelinde yük-yerdeğiştirme eğrileri

5. SONUÇLAR

Gerçekleştirilen parametrik çalışmalar yardımıyla ulaşılan sonuçlar aşağıda özetlenmiştir:

- Drucker-Prager malzeme modelinde; deney sonuçları ile yük-yerdeğiştirme eğrileri karşılaştırıldığında; kiriş yüksekliğince sonlu eleman boyutu değişiminin kapasite artışına veya azalışına belirgin bir etkisi görülmemektedir. Yine, çubuk uzunluğu boyunca sonlu eleman boyutu artışının elastik sınırlar içerisinde önemli bir etkisi olmadığı görülmektedir. Ancak, elastik sınır ötesinde kiriş uzunluğu boyunca sonlu eleman boyutunun $7-8d_{max}$ aşan değerlerinde, (örneğin 152.4 mm'den 365.76 mm'ye artışı), yük taşıma kapasitesini daha büyük tahmine neden olmaktadır.

• Çatlak modelinde; deneysel ve analitik yük-yerdeğiştirme eğrileri karşılaştırıldığında; çözümü yapılan sonlu eleman boyutlarındaki kırışlar ile deneyde [4] elde edilen eğriler birbiriyle yeterince örtüşmektedir. Fakat; çubuk uzunluğu boyunca sonlu eleman boyutunun (yatayda) 365.76 mm'den 152.4 mm'ye küçülmesi durumunda kırışın yük taşıma kapasitesinde azalma yönünde değişim daha çok görülmektedir. Söz konusu modelde; deneyde [4] bulunmuş maksimum yük taşıma kapasitesine en yakın ortalama yük değeri sonlu eleman boyutunun 365.76 mm (yatayda) alınması durumunda elde edilmektedir, ki bu değer; 315.17 kN ve hata %5.6'dır. Kırış yüksekliğince sonlu eleman boyutu değişimi yük taşıma kapasitesinde farklılığa sebep olmakla birlikte, bu farklılığın belirgin olarak artma yada azalma yönünde olduğunu söylemek güçtür.

KAYNAKLAR

- [1] Ngo D. and Scordelis A.C., "Finite element analysis of reinforced concrete beams", ACI Journal, , 64, No.3, 152-163, 1967.
- [2] Köksal, O., "Modeling of Concrete Fracture", Doktora Tezi, BÜ, İstanbul, 1998.
- [3] Arslan, G., "Tersinir Yükler Altında Betonarme Çubukların Kesme Mukavemeti", Doktora Tez Raporu2, YTÜ, 2002.
- [4] Bresler B. and Scordelis A. C., "Shear Strength of Reinforced Concrete Beams", ACI Journal, Proceedings Vol 60, No.2, pp.51-72., 1963.
- [5] LUSAS, Finite Element System, Examples Manual, Version 13.3, Issue 2, FEA Ltd., United Kingdom, 2001.
- [6] Chen W. F., 'Plasticity in Reinforced Concrete', McGraw-Hill Company, 1982.
- [7] Doran B., Köksal H.O., Polat Z., Karakoç C., "Betonarme Elemanlarda Sonlu Eleman Uygulamalarında Drucker-Prager Akma Kriteri Kullanılması", İMO Teknik Dergi, 9, Sayı 2, 1998.
- [8] Polat Z., Doran B., Köksal H.O., "Drucker-Prager Akma Kriteri Kullanılarak Betonda Doğrusal Olmayan Davranışın İncelenmesi", Y.T.Ü. Dergisi, Sayı 1, 2000.
- [9] Ersoy U., ve Özcebe G., "Betonarme", Geliştirilmiş Yeni Baskı, Evrim Yayınevi, İstanbul, 58-76, 2001.
- [10] Bedard C. and Kotsovos M.D., "Fracture process of concrete for NLFEA methods", ASCE Journal of Structural Engineering, 112, No.3, 573-586, 1986.
- [11] Bazant Z. P. and Oh B., "Crack band theory for fracture of concrete", Materiaux et Constructions, 16, No.93, 155-177, 1983.